



## حالت‌های کر جابجاشده‌ی فوتون‌افزوده غیرخطی و ویژگی‌های آماری آن‌ها

غلامرضا لشکری وند، غلامرضا هنرآسا و حسن پاکارزاده

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده - در این مقاله، حالت‌های کر جابجاشده‌ی فوتون‌افزوده غیرخطی به عنوان میدان خروجی از یک تداخل‌سنج ماخ-زندرحاوی محیط کر زمانی که میدان‌های ورودی حالت همدوس فوتون‌افزوده تغییرشکل یافته و حالت خلا هستند، معرفی می‌گردد. در ادامه، به عنوان تحقق فیزیکی حالت‌های معرفی‌شده، رهیافت مطرح‌شده برای پتانسیل پوش-تلا اعمال و توزیع تعداد فوتون و پارامتر مندل آن‌ها بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد حالت‌های معرفی‌شده را می‌توان به عنوان حالت‌های غیرکلاسیکی در نظر گرفت.

کلیدواژه- تداخل‌سنج ماخ-زندر، حالت‌های کر جابجاشده، حالت‌های فوتون‌افزوده، توزیع تعداد فوتون، پارامتر مندل

## Nonlinear Photon-Added Displaced Kerr States and Their Statistical Properties

Gholamreza Lashkarivand, Gholamreza Honarasa and Hassan Pakarzadeh

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz

Abstract- In this paper, nonlinear photon-added displaced Kerr states are introduced as the output field of a Mach-Zehnder interferometer including the Kerr medium when the input fields are the deformed photon-added coherent state and the vacuum state. As the physical realization, the presented approach is applied to the Poschl-Teller potential and their photon number distribution and Mandel parameter are studied. The results show that the introduced states can be considered as the nonclassical states.

Keywords: Mach-Zehnder interferometer, Displaced Kerr state, Photon-added coherent states, Photon number distribution, Mandel Parameter

## ۱- مقدمه

حالت‌های همدوس  $\hat{A}|\alpha\rangle_f = \alpha|\alpha\rangle_f$  [۱ و ۲].

فوتون‌افزوده تعمیم‌یافته از اعمال  $p$  مرتبه عملگر خلق تغییرشکل یافته بر حالت‌های همدوس غیرخطی به صورت زیر به دست می‌آیند [۶]:

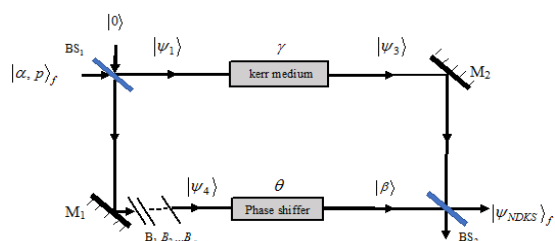
$$|\alpha, p\rangle_f = N_1 A^{\dagger p} |\alpha\rangle_f \quad (1)$$

$$= N_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f(n+p)]! \alpha^n \sqrt{(n+p)!}}{[f(n)]!^2 n!} |n+p\rangle$$

که در آن  $[f(n)]! = f(n) \dots f(1)$  و

$$N_1 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} [f(n+p)]!^2 (n+p)!}{[f(n)]!^4 n!^2} \right)^{-1/2} \quad (2)$$

ضریب بهنجارش است. یک طرح آزمایشگاهی بر اساس تداخل‌سنج ماخ-زندرکه شامل یک محیط غیرخطی کر در یک شاخه و یک انتقال‌دهنده فاز در شاخه دیگر است (شکل ۱)، می‌تواند حالت‌های کر جابجاشده فوتون‌افزوده غیرخطی را به وجود آورد. حالت همدوس فوتون‌افزوده تغییرشکل یافته  $|\alpha, p\rangle_f$  با حالت خلاء در پرتوشکاف  $BS_1$  تداخل کرده و در شاخه بالایی تداخل‌سنج، پس از عبور از یک محیط کر با ثابت  $\gamma = 2\chi L / v$  (طول محیط کر،  $v$  سرعت فاز در محیط کر و  $\chi$  ضریب جفت‌شدگی مرتبط با پذیرفتاری مرتبه سوم محیط کر) و با عملگر تحول در تصویر برهم‌کنش  $\hat{U}_k(\gamma)$  به یک حالت کر غیرخطی تبدیل می‌شود. در شاخه پایینی با گذر از  $p$  پرتوشکاف متوالی،  $p$  فوتون از حالت همدوس فوتون‌افزوده تغییرشکل یافته کم می‌شود و با عبور از یک انتقال‌دهنده فاز، در پرتوشکاف  $BS_2$  با شاخه بالا درهم‌آمیخته و حالت میدان خروجی  $|\psi_{NDKS}\rangle_f$  را ایجاد می‌نماید.



شکل ۱: نمایی ساده از طرح‌واره‌ی حالت کر غیرخطی جابجاشده با ورودی حالت فوتون‌افزوده تغییرشکل یافته و حالت خلاء.

اگر برهم‌کنش پرتو خروجی از پرتوشکاف  $BS_1$  با محیط کر

امروزه ویژگی‌های غیرکلاسیکی میدان‌های تابشی در اپتیک کوانتومی به دلیل کاربردهایی که در حوزه اطلاعات کوانتومی، مخابرات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... دارند [۱]، از اهمیت فراوانی برخوردارند. تعمیم حالت‌های همدوس می‌تواند باعث بروز ویژگی‌های غیرکلاسیکی گردد و استفاده از یک تابع غیرخطی برای تغییرشکل حالت‌های همدوس، از مهمترین تعمیم‌های حالت‌های همدوس استاندارد محسوب می‌شود که به این حالت‌های تعمیم‌یافته، حالت‌های همدوس غیرخطی می‌گویند [۲].

یکی دیگر از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته، حالت فوتون‌افزوده است که با به‌کارگیری مکرر عملگر خلق فوتون روی پایه‌های حالت همدوس به دست می‌آید. این حالت‌ها توسط اگروال و تارا در سال ۱۹۹۹ معرفی [۳] و چند سال بعد بوسیله زاواتا و همکارانش [۴] به طور تجربی محقق شدند. افزودن فوتون به میدان‌های گاوسی می‌تواند منجر به بروز و نمایش ویژگی‌های غیرکلاسیکی شود [۵]. حالت‌های فوتون‌افزوده تغییرشکل یافته در سال ۲۰۱۱ معرفی گردید و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن مورد بررسی قرار گرفت [۶]. اخیراً حالت‌های کر جابجاشده غیرخطی که از تداخل بین یک حالت همدوس فوتون‌افزوده و حالت خلاء در یک تداخل‌سنج ماخ-زندر حاوی محیط کر به دست می‌آیند معرفی شده است [۷].

در این مقاله، برای اولین بار، با در نظر گرفتن حالت‌های فوتون‌افزوده تغییرشکل یافته، به‌عنوان حالت ورودی محیط کر و قراردادن آن‌ها در یک تداخل‌سنج ماخ-زندر، دسته متمایزی از حالت‌های کر جابجاشده فوتون‌افزوده غیرخطی ( $|\psi_{NDKS}\rangle_f$ )، معرفی و سپس ویژگی‌های آماری آن‌ها بررسی می‌شود.

## ۲- حالت‌های کر جابجاشده فوتون‌افزوده

### غیرخطی

حالت‌های همدوس غیرخطی به‌عنوان ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی تغییرشکل یافته  $\hat{A} = \hat{a}f(\hat{n})$  که در آن  $f(\hat{n})$  تابعی از عملگر تعداد  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  است، تعریف می‌شوند

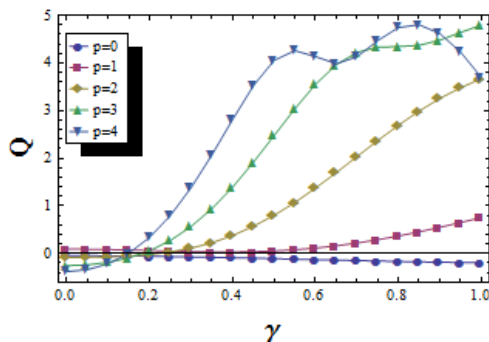
مندل را برای پتانسیل پوش-تلا که کاربردهای متنوعی در زمینه‌های مختلف فیزیکی دارد را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. تابع غیرخطی متناظر با این پتانسیل به صورت  $f(\hat{n}) = \sqrt{n+\nu}$  و  $\nu > 2$  در نظر گرفته می‌شود [۱۰].

### ۳-۱- پارامتر مندل

$$Q = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1$$

پارامتر مندل که به صورت  $Q = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1$  تعریف می‌شود، میزان انحراف توزیع حالت‌ها را از آمار پواسونی نشان می‌دهد؛ به طوریکه  $Q > 0$  متناظر با توزیع فراپواسونی (حالت کلاسیکی)،  $Q < 0$  متناظر با توزیع زیرپواسونی (حالت غیرکلاسیکی) و  $Q = 0$  متناظر با توزیع پواسونی (حالت هم‌دوس) می‌باشد. با محاسبه مقادیر چشم‌داشتی روی حالت کر جابجاشده فوتون افزوده غیرخطی معرفی شده پارامتر مندل به دست می‌آید.

در شکل ۲ نحوه تغییرات پارامتر مندل بر حسب  $\gamma$  نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در حالت  $p=0$  که معادل یک حالت کر جابجاشده بدون فوتون برانگیخته شده است، پارامتر مندل برای تمام مقادیر  $\gamma$  منفی می‌شود و آمار زیرپواسونی از خود نشان می‌دهد. با افزایش  $p$  این رفتار به سمت  $\gamma$  های کوچکتر متمایل می‌گردد.



شکل ۲: پارامتر مندل به صورت تابعی از  $\gamma$  برای مقادیر مختلف  $p$  و  $\nu=3$  و  $\beta=2$ ،  $\alpha=1$

### ۳-۲- توزیع تعداد فوتون

احتمال یافتن فوتون از ویژگی‌های کلیدی هر حالت کوانتومی است. با استفاده از رابطه زیر [۱۱]:

غیرخطی در شاخه‌ی بالای تداخل‌سنج را با هامیلتونی  $H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\chi a^{\dagger 2} a^2$  بیان کنیم [۷]؛ حالت خروجی از محیط کر به صورت  $|\psi_3\rangle = \hat{U}_k(\gamma)|\psi_1\rangle$  به دست می‌آید که در آن  $\hat{U}_k(\gamma) = \exp[i\frac{\gamma}{2}\hat{n}(\hat{n}-1)]$  است. بنابراین:

$$|\psi_3\rangle = \hat{U}_k(\gamma)|\alpha, p\rangle_f = N_1 \sum_{m=0}^{\infty} [e^{i\frac{\gamma}{2}(m+p)(m+p-1)} \times \frac{[f(m+p)]!}{[f(m)]!^2} \times \frac{\alpha^m \sqrt{(m+p)!}}{m!} |m+p\rangle]$$
 (۳)

در شاخه‌ی دیگر، پس از بیرون کشیدن  $p$  فوتون توسط پرتوشکاف‌های متوالی که ضرایب عبور بالایی دارند، در انتقال‌دهنده فاز دچار جابجایی فاز می‌شود ( $|\beta\rangle$ ) و در پرتوشکاف  $BS_2$  با حالت کر فوتون‌افزوده‌ی غیرخطی تداخل می‌کند و حالت کر جابجاشده‌ی فوتون‌افزوده غیرخطی را ایجاد خواهد کرد. چنانچه پرتوشکاف  $BS_2$  بازتابندگی بالایی داشته باشد ( $r \approx 1$ )، افت‌وخیزهای کوانتومی شاخه‌ی پایین در خروجی نهایی تاثیر ندارد و فقط نقش یک نیروی محرکه‌ی کلاسیک را بازی می‌کند که به وسیله‌ی عملگر جابجایی  $\hat{D}(\beta) = \exp(\beta a^\dagger - \beta^* a)$  توصیف می‌شود [۹]. حالت خروجی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|\psi_{NDKS}\rangle_f = \frac{1}{N} \hat{D}(\beta)|\psi_3\rangle = \frac{N_1}{N} \sum_{m=0}^{\infty} [e^{i\gamma/2(m+p)(m+p-1)} \frac{[f(m+p)]!}{[f(m)]!^2} \times \frac{\alpha^m \sqrt{(m+p)!}}{m!} \hat{D}(\beta)|m+p\rangle]$$
 (۴)

### ۳- ویژگی‌های آماری

تابع غیر خطی  $f(\hat{n})$  این امکان را فراهم می‌کند تا با انتخاب مناسب آن برای هر سامانه فیزیکی، پارامترهای استاندارد مربوط به آن سامانه را محاسبه و تحلیل کرد. در این مقاله، دو ویژگی آماری توزیع تعداد فوتون و پارامتر

می‌تواند ناشی از تداخل در فضای فاز باشد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله حالت‌های کر جابجاشده فوتون‌افزوده غیرخطی معرفی گردید. این حالت‌ها از تداخل یک حالت فوتون‌افزوده تعمیم‌یافته با حالت خلا در یک تداخل‌سنج ماخ-زندر حاوی محیط کر ساخته می‌شوند. با بررسی ویژگی‌هایی مانند پارامتر مندل و توزیع فوتون برای حالت ارائه‌شده، مشاهده می‌شود که این حالت‌ها رفتار غیرکلاسیکی از خود نشان می‌دهند و می‌توان آن‌ها را به عنوان حالت‌های غیرکلاسیکی در نظر گرفت.

#### مراجع

- [1] D. Browne, S. Bose, F. Mintert, M.S. Kim, "From quantum optics to quantum technologies", Quantum Electronics, Vol. 54, pp. 2-18, 2017
- [2] R. L. de Matos Filho, W. Vogel, "Nonlinear coherent states", Phys. Rev. A, Vol. 54, pp. 4560-4563, 1996.
- [3] G. S. Agarwal, K. Tara, "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state", 1991 Phys. Rev. A, Vol. 43, pp. 492-497, 1991.
- [4] A. Zavatta, S. Viciani, M. Bellini, "Quantum-to-Classical Transition with Single-Photon-Added Coherent States of Light", Science, Vol. 306, pp. 660-662, 2004.
- [5] C. T. Lee, "Theorem on nonclassical states", Phys. Rev. A, Vol. 52, pp. 3374-3376, 1995.
- [6] O. Safaean, M. K. Tavassoly, "Deformed photon-added nonlinear coherent states and their non-classical properties", J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 44, pp. 225301, 2011.
- [7] A. Chatterjee, R. Ghosh, "Nonlinear displaced Kerr state and its nonclassical properties", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 33, pp. 1511-1522, 2016.
- [8] V. L. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria, "f-oscillators and nonlinear coherent states", Phys. Scr., Vol. 55, pp. 528-541, 1997.
- [9] M. Kitagawa, Y. Yamamoto, "Number-phase minimum-uncertainty state with reduced number uncertainty in a Kerr nonlinear interferometer", Phys. Rev. A, Vol. 34, pp. 3974-3988, 1986.
- [10] G.R. Honarasa, M.K. Tavassoly, M. Hatami, "Quantum phase properties associated to solvable quantum systems using the nonlinear coherent states approach", Opt. Commun., Vol. 282, pp. 2192-2198, 2009.
- [11] R. Tanaś, B. K. Murzakhmetovs, T. Gantsogs, A. V. Chizhov, "Phase properties of displaced number states", Quantum Opt., Vol. 4, pp. 1-7, 1992.

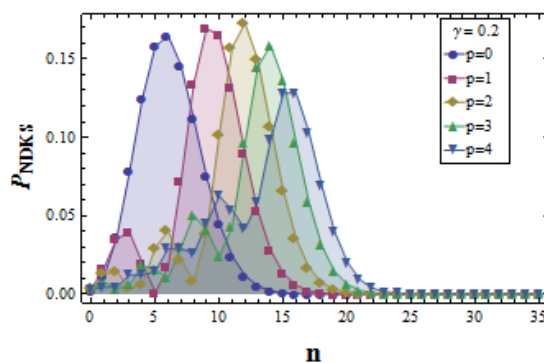
$$\langle n | \hat{D}(\beta) | m \rangle = e^{-|\beta|^2/2} \begin{cases} \beta^{n-m} \left(\frac{m!}{n!}\right)^{1/2} L_m^{n-m}(|\beta|^2), n \geq m \\ (-\beta^*)^{m-n} \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} L_n^{m-n}(|\beta|^2), n < m \end{cases} \quad (5)$$

که در آن  $L_n^m(x)$  چند جمله‌ای لاگر وابسته است می‌توان توزیع تعداد فوتون  $P_{NDKS}$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$P_{NDKS} = \left| \langle n | \psi_{NDKS} \rangle_f \right|^2 = \left| \frac{N_1}{N} \right|^2 e^{-|\beta|^2} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f(m+p)]! \alpha^m}{[f(m)]!^2 m!} \right|^2 \times \begin{cases} \left( \frac{(m+p)!}{\sqrt{n!}} e^{i\gamma/2(m+p)(m+p-1)} \beta^{n-m-p} L_{m+p}^{n-m-p}(|\beta|^2) \right)^2, n \geq m+p \\ \left( \sqrt{n!} e^{i\gamma/2(m+p)(m+p-1)} (-\beta^*)^{m+p-n} L_n^{m+p-n}(|\beta|^2) \right)^2, n < m+p \end{cases} \quad (6)$$

که در آن

$$\left| \frac{N_1}{N} \right|^2 = \left( \sum_{m=0}^{\infty} |\alpha|^{2m} \frac{[f(m+p)]!^2 (m+p)!}{[f(m)]!^4 m!^2} \right)^{-1} \quad (7)$$



شکل ۳: توزیع تعداد فوتون برای مقادیر مختلف  $p$  و  $\gamma = 0.2$ .

در شکل ۳،  $P_{NDKS}$  بر حسب تعداد فوتون  $n$  برای مقادیر مختلف  $p$  و پارامتر محیط کر  $\gamma = 0.2$  رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود آمار فوتونی با افزایش  $p$  (در محدوده‌ای که رفتار زیرپواسونی دارند)، باعث جایگزیده‌تر شدن توزیع فوتون‌ها شده و با افزایش بیشتر  $p$  پس از وارد شدن به محدوده‌ی فراپواسونی، توزیع فوتون گسترده‌تر می‌شود و به تدریج این توزیع، نوسانی و نامنظم شده که