

## تأثیر حرکت اتم در حفظ درهم تنیدگی دو اتم دوترازی در یک محیط غیرمارکوفی

ساره گل کار، محمد کاظم توسلی

گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

چکیده - در این مقاله دینامیک درهم تنیدگی دو اتم دوترازی در حال حرکت با در نظر گرفتن برهم کنش دوقطبی-دوقطبی در یک محیط غیرمارکوفی مشترک را بررسی می کنیم. نتایج نشان می دهند که در حضور برهم کنش دوقطبی-دوقطبی با انتخاب مناسب حالت اولیه اتمها، امکان حفظ درهم تنیدگی فراهم می شود. همچنین مشاهده می کنیم که حرکت اتمی در غیاب برهم کنش دوقطبی-دوقطبی منجر به حفظ درهم تنیدگی در مدت زمان طولانی می شود.

کلید واژه- غیرمارکوفی، برهم کنش دوقطبی-دوقطبی، چگالی طیفی، تلاقی.

## The effect of atomic motion on the entanglement protection of two two-level atoms in a non-Markovian environment

S. Golkar, M. K. Tavassoly

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper, we consider the entanglement dynamics of two moving two-level atoms accompanied by dipole-dipole interaction within a common non-Markovian environment. The results show that, in the presence of dipole-dipole interaction by appropriately choosing the initial states of atoms, entanglement may be protected. Also, we find that atomic motion in the absence of dipole-dipole interaction leads to entanglement preservation in a long time.

Keywords: Non-Markovian, Dipole-dipole interaction, Spectral density, Concurrence.

## ۱- مقدمه

حالت اولیه سامانه با داشتن یک برانگیختگی در کل سامانه به صورت زیر باشد:

$$|\psi(0)\rangle = (c_1(0)|1\rangle_1|0\rangle_2 + c_2(0)|0\rangle_1|1\rangle_2)|0_k\rangle_R \quad (2)$$

که در آن  $|0_k\rangle_R$  حالت خلا مد  $k$  ام منبع و  $|0\rangle_j, |1\rangle_j$  ( $j=1,2$ ) حالت‌های پایه و برانگیخته کیوبیت‌ها است. با توجه به فرض تک‌برانگیختگی، حالت کوانتومی سامانه در زمان  $t$  را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$|\psi(t)\rangle = (c_1(t)|1\rangle_1|0\rangle_2 + c_2(t)|0\rangle_1|1\rangle_2)|0_k\rangle_R + \sum_k c_k(t)|0\rangle_1|0\rangle_2|1_k\rangle_R \quad (3)$$

که  $|1_k\rangle_R$  حالت منبع با یک فوتون در مد  $k$  ام است. اگر حرکت کیوبیت‌ها در راستای محور  $z$  باشد، تابع مد میدان منبع را به صورت  $f_k(vt)$  در نظر می‌گیریم که  $v$  سرعت کیوبیت است. برای مدهای  $TEM_{mnp}$  شکل این توابع به صورت زیر معرفی شده است [۷].

$$f_k(vt) = \sin(p_k \pi vt / L) \quad (4)$$

که در آن  $p_k$  تعداد نصف طول موج در مد  $k$  ام میدان درون یک کاواک به طول  $L$  است. با در نظر گرفتن سرعت کیوبیت به صورت  $v = g_k L / \pi$  و با فرض اینکه  $p_1 = p_2 = \dots = p_k \equiv p$  باشد، در نتیجه  $f_k(z) = \sin(p g_k t)$ . اکنون با استفاده از معادله شرودینگر وابسته به زمان  $(i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle)$  به معادلات جفت شده زیر می‌رسیم:

$$i\dot{c}_1(t) = \alpha_1 \sum_k g_k f_k(z) c_k(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} + K c_2(t) \quad (5)$$

$$i\dot{c}_2(t) = \alpha_2 \sum_k g_k f_k(z) c_k(t) e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} + K c_1(t) \quad (6)$$

$$i\dot{c}_k(t) = g_k^* f_k(z) c_k(t) e^{i(\omega_k - \omega_0)t} + [\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t)] \quad (7)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۷) و جایگذاری  $c_k(t)$  در معادلات (۵) و (۶)، به معادلات انتگرالی برای دامنه‌های  $c_1(t)$  و  $c_2(t)$  می‌رسیم:

$$\dot{c}_1(t) = -\int_0^t dt_1 f(t-t_1) [\alpha_1 [\alpha_1 c_1(t_1) + \alpha_2 c_2(t_1)] - iK c_2(t)], \quad (8)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\int_0^t dt_1 f(t-t_1) [\alpha_2 [\alpha_1 c_1(t_1) + \alpha_2 c_2(t_1)] - iK c_1(t)],$$

که در آن تابع هم‌بستگی  $f(t-t_1)$  به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$f(t-t_1) = \int d\omega_k J(\omega_k) f_k(vt) f_k(vt_1) \exp[-i(\omega_k - \omega_0)(t-t_1)]. \quad (9)$$

در اینجا  $J(\omega_k)$  چگالی طیفی میدان الکترومغناطیسی درون یک کاواک میرا است. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که این چگالی طیفی به شکل لورنتسی باشد [۸]:

یک سامانه واقعی به طور اجتناب‌ناپذیری با محیط اطراف خود برهم‌کنش دارد به نحوی که منجر به از دست رفتن اطلاعات ذخیره شده در سامانه می‌شود [۱]. در صورتی که سامانه مورد نظر درون یک محیط مارکوفی قرار گرفته باشد کاهش درهم‌تنیدگی (واهمدوسی) به شکل میرایی نمایشی است [۲] هم‌چنین سامانه فیزیکی ممکن است درون یک محیط غیرمارکوفی باشد. در این صورت، محیط قسمتی از اطلاعات را به سامانه برمی‌گرداند و حافظه طولانی مدت محیط منجر به احیای درهم‌تنیدگی می‌شود [۳]. امروزه به دلیل اهمیت روزافزون درهم‌تنیدگی، ایده‌های مختلفی برای حفظ درهم‌تنیدگی مطرح شده است [۴، ۵]. در این مقاله به بررسی یک سامانه دوکیوبیتی در حال حرکت درون یک محیط مشترک غیرمارکوفی همراه با برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی می‌پردازیم.

## ۲- مدل

فرض می‌کنیم که دو کیوبیت مشابه  $A$  و  $B$  (دو اتم دو-ترازی) با یک محیط مشترک بوزونی در دمای صفر درجه برهم‌کنش می‌کنند. با در نظر گرفتن برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی هامیلتونی کلی این سامانه فیزیکی در تقریب موج چرخان را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\text{int}} + H_{\text{dd}}, \\ H_0 &= \omega_0 (\sigma_+^A \sigma_-^A + \sigma_+^B \sigma_-^B) + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k, \\ H_{\text{int}} &= (\alpha_1 \sigma_+^A + \alpha_2 \sigma_+^B) \sum_k g_k f_k(z) a_k + \text{H.C.}, \\ H_{\text{dd}} &= K (\sigma_+^A \sigma_-^B + \sigma_+^B \sigma_-^A), \end{aligned} \quad (1)$$

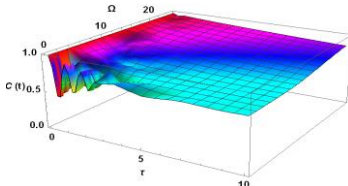
که در آن  $\omega_0$  بسامد گذار دو کیوبیت،  $\sigma_\pm^{A,B}$  عملگرهای بالا بر و پایین بر کیوبیت‌های  $A$  و  $B$  هستند.  $a_k, a_k^\dagger$  عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش مد  $k$  ام منبع با بسامد  $\omega_k$  و  $g_k$  ثابت جفت‌شدگی بین کیوبیت و مد  $k$  ام منبع،  $\alpha_1, \alpha_2$  ثابت‌های حقیقی بدون بعد هستند که قدرت برهم‌کنش هر کیوبیت را با مد منبع اندازه‌گیری می‌کنند [۶] و  $f_k(z)$  بیانگر حرکت کیوبیت است [۷]. هم‌چنین  $K = \bar{\Gamma}_2^{-3} [\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2 - 3(\bar{d}_1 \cdot \bar{r}_2)(\bar{d}_2 \cdot \bar{r}_2) / \bar{\Gamma}_2^2]$  ثابت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی است که در آن  $\bar{d}_1, \bar{d}_2$  لحظه‌ای کیوبیت  $A(B)$  و پارامتر  $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$  موقعیت نسبی دو کیوبیت را نشان می‌دهد. حال فرض می‌کنیم که

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_1(t)|^2 & c_1(t)c_2^*(t) & 0 \\ 0 & c_1^*(t)c_2(t) & |c_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - |c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

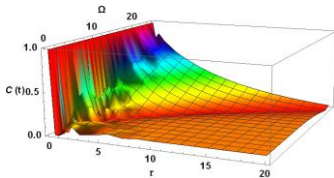
که با استفاده از آن و تعریف شناخته شده تلاقی، این سنجه برای سامانه مورد نظر به صورت بسته زیر به دست می‌آید:

$$C(t) = 2 |c_1(t)c_2^*(t)| \quad (15)$$

اکنون با در نظر گرفتن حالت اولیه کیوبیت‌ها به صورت حالت درهم‌تنیده بل  $(|\psi_{\pm}(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|1\rangle_1|0\rangle_2 \pm |0\rangle_1|1\rangle_2)$ ، دینامیک درهم‌تنیدگی را با توجه به رابطه (۱۵) در رژیم جفت‌شدگی قوی (غیرمارکوفی) تجزیه و تحلیل می‌کنیم. شکل‌های ۱ و ۲، تحول زمانی تلاقی سامانه را برحسب زمان  $\tau$  و حرکت اتمی  $\Omega$  به ترتیب به ازای دو حالت اولیه متفاوت  $|\psi_{\pm}(0)\rangle$  برای پارامترهای جفت‌شدگی نسبی هر دو نمودار در ابتدا رفتار نوسانی دارد و با گذشت زمان بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد که در شکل ۱، به مقدار پایای غیرصفر،  $0.7$  و در شکل ۲ به مقدار بسیار کوچک  $0.078$  میرا شده است. لذا مشاهده می‌کنیم که به ازای حالت‌های اولیه مختلف رفتار دینامیکی درهم‌تنیدگی متفاوت است. همچنین، نمودارها حاکی از آن است که در غیاب برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی با افزایش حرکت اتمی، درهم‌تنیدگی حفظ می‌گردد و فرایند میرایی در مدت زمان طولانی‌تری رخ می‌دهد.



شکل ۱: تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی بر حسب  $\tau$  و  $\Omega$  به ازای  $K=0$  و  $|\psi_{-}(0)\rangle$  در یک محیط غیرمارکوفی  $R=10$ .



شکل ۲: تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی بر حسب  $\tau$  و  $\Omega$  به ازای  $K=0$  و  $|\psi_{+}(0)\rangle$  در یک محیط غیرمارکوفی  $R=10$ .

شکل‌های ۳ تا ۶ تحول زمانی تلاقی سامانه را برحسب زمان، به ازای حالت اولیه  $|\psi_{-}(0)\rangle$  و  $|\psi_{+}(0)\rangle$  در یک

$$J(\omega_k) = \frac{W^2 \lambda}{\pi[(\omega_k - \omega_0)^2 + \lambda^2]} \quad (10)$$

پارامتر  $\lambda$  پهنای توزیع لورنتسی و تابع وزن  $W$  متناسب با بسامد رابی خلا است. برای بررسی دینامیک کیوبیت‌ها دو رژیم جفت‌شدگی ضعیف و قوی وجود دارد، در رژیم جفت‌شدگی ضعیف ( $\lambda < 2W$ )، رفتار کلی سامانه مارکوفی است. اما در رژیم قوی ( $\lambda > 2W$ )، رفتار سامانه غیرمارکوفی است و احیای درهم‌تنیدگی همراه با نوسانات است. با استفاده از چگالی طیفی در (۱۰)، تابع هم‌بستگی  $f(t-t_1)$  به صورت زیر خواهد شد:

$$f(t-t_1) = W^2 \sin(\Omega t) \sin(\Omega t_1) \exp[-\lambda(t-t_1)] \quad (11)$$

در به دست آوردن رابطه بالا، فرض کرده‌ایم  $\Omega = pg$  و  $g_1 = g_2 = \dots = g_k \equiv g$  با قراردادن  $f(t-t_1)$  در معادلات (۸) و (۹) و با استفاده از روش شبه‌مد [۹] و تقریب  $RWA$ ، به چهار معادله جفت‌شده زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \frac{-iR}{4} r_1 [b_1(t) + b_2(t)] - iKc_2(t), \\ \dot{c}_2(t) &= \frac{-iR}{4} r_2 [b_1(t) + b_2(t)] - iKc_1(t), \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن  $r_j = \alpha_j / \alpha_T$ ,  $j=1,2$  قدرت جفت‌شدگی نسبی،  $\alpha_T = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$  ثابت جفت‌شدگی جمعی و  $R = \alpha_T W$  بسامد رابی خلا است. با گرفتن لاپلاس از چهار معادله بالا و در نظر گرفتن شرایط اولیه  $b_1(0) = b_2(0) = 0$  به معادلات زیر می‌رسیم:

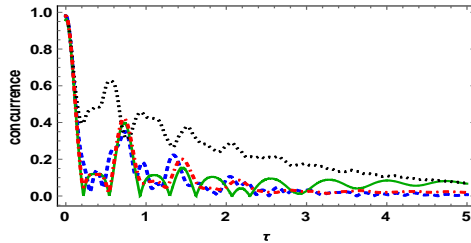
$$\begin{aligned} sc_1(s) - c_1(0) &= \frac{-iR}{4} r_1 [b_1(s) + b_2(s)] - iKc_2(s), \\ sc_2(s) - c_2(0) &= \frac{-iR}{4} r_2 [b_1(s) + b_2(s)] - iKc_1(s), \\ sb_1(s) &= -(\lambda - i\Omega) b_1(s) - iR[r_1 c_1(s) + r_2 c_2(s)], \\ sb_2(s) &= -(\lambda + i\Omega) b_2(s) - iR[r_1 c_1(s) + r_2 c_2(s)]. \end{aligned} \quad (13)$$

در انتها با گرفتن عکس لاپلاس از معادلات اخیر، دامنه‌های احتمال  $c_1(t)$  و  $c_2(t)$  به دست می‌آیند که به دلیل حجم بالای جواب‌ها از آوردن شکل صریحشان در اینجا خودداری می‌کنیم.

### ۳- درهم‌تنیدگی

برای به دست آوردن دینامیک درهم‌تنیدگی یک سامانه دوکیوبیتی، سنجه تلاقی [۱۱] را محاسبه می‌کنیم، ماتریس کاهش‌یافته اتمی  $\rho$  در پایه‌های اتمی  $\{|1\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |0\rangle_1|0\rangle_2\}$  در زمان  $t$  به شکل زیر نوشته می‌شود:

کاهش یافته اما با در نظر گرفتن حرکت اتمی (شکل ۶) دامنه نوسانات کاهش می‌یابد و درهم‌تنیدگی سامانه نسبت به شکل ۵ طی زمان کوتاه‌تری به صفر می‌رسد.



شکل ۶: تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی بر حسب  $\tau$  به ازای  $\Omega=5$  و  $|\psi_+(0)\rangle$  ( $K=0$  (خط پیوسته، سبز)،  $K=1$  (نقطه-خط، قرمز)،  $K=5$  (خط چین، آبی)،  $K=12$  (نقطه چین، مشکی)).

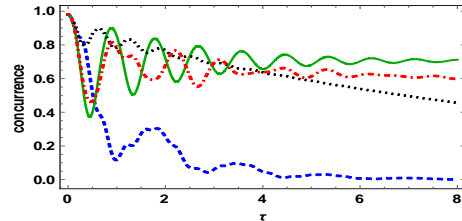
#### ۴- نتیجه‌گیری

نتایج نشان می‌دهند که در غیاب برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی برای دو حالت اولیه بل ذکر شده، افزایش حرکت اتمی منجر به حفظ درهم‌تنیدگی می‌شود و تلاقی به مقدار پایای غیرصفر می‌رسد. اما با در نظر گرفتن برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی، بسته به انتخاب حالت اولیه اتم‌ها، دینامیک درهم‌تنیدگی متفاوتی را مشاهده می‌کنیم: به ازای  $|\psi_+(0)\rangle$  با افزایش قدرت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی میزان واهمدوسی کاهش یافته و درهم‌تنیدگی سامانه بعد از گذشت زمان زیادی به صفر می‌رسد اما به ازای  $|\psi_-(0)\rangle$  درهم‌تنیدگی سامانه سریع‌تر از بین می‌رود. هم‌چنین، اگر برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی در حضور حرکت اتمی باشد فرایند میرایی درهم‌تنیدگی سریع‌تر رخ می‌دهد. لذا همیشه وجود برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی منجر به حفظ درهم‌تنیدگی نمی‌شود.

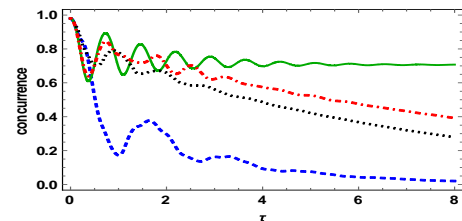
#### مراجع

- [1] W. Dur and H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. **92**, 180403 (2004).
- [2] T. Yu and J. Eberly, Phys. Rev. Lett. **93** 140404 (2004).
- [3] B. Bellomo, R. L. Franco, S. Maniscalco, and G. Compagno, Phys. Rev. A **78**, 060302 (2008).
- [4] B. Bellomo, R. L. Franco, and G. Compagno, Phys. Rev. Lett. **99**, 160502 (2007).
- [5] X. Xiao, M.-F. Fang, Y.-L. Li, K. Zeng, C. Wu, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42** 235502 (2009).
- [6] S. Maniscalco, F. Francica, R. L. Zaffino, N. L. Gullo, and F. Plastina, Phys. Rev. Lett. **100**, 090503 (2008).
- [7] R. R. Schlicher, Opt. Commun **70**, 97 (1989).
- [8] H.-P. Breuer, F. Petruccione, "The theory of open quantum systems" (Oxford University Press on Demand), (2002)
- [9] B. Garraway, Phys. Rev. A **55**, 2290 (1997).
- [10] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).

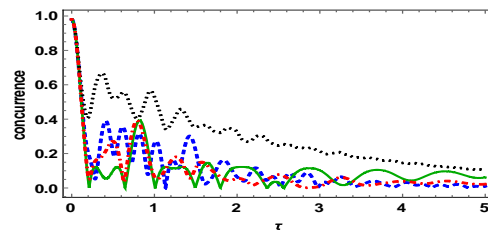
محیط غیرمارکوفی نشان می‌دهند. در این نمودارها تاثیر برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی و حرکت اتمی مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۳ به ازای  $|\psi_-(0)\rangle$  مشاهده می‌کنیم که در غیاب حرکت اتمی با افزایش قدرت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی درهم‌تنیدگی سامانه به صفر میل می‌کند. اگر حرکت اتمی را همراه با برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی در نظر بگیریم (شکل ۴) درهم‌تنیدگی سریع‌تر به صفر میل می‌کند.



شکل ۳: تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی بر حسب  $\tau$  به ازای  $\Omega=0$  و  $|\psi_-(0)\rangle$  ( $K=0$  (خط پیوسته، سبز)،  $K=1$  (نقطه-خط، قرمز)،  $K=5$  (خط چین، آبی)،  $K=12$  (نقطه چین، مشکی)).



شکل ۴: تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی بر حسب  $\tau$  به ازای  $\Omega=5$  و  $|\psi_-(0)\rangle$  ( $K=0$  (خط پیوسته، سبز)،  $K=1$  (نقطه-خط، قرمز)،  $K=5$  (خط چین، آبی)،  $K=12$  (نقطه چین، مشکی)).



شکل ۵: تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی بر حسب  $\tau$  به ازای  $\Omega=0$  و  $|\psi_+(0)\rangle$  ( $K=0$  (خط پیوسته، سبز)،  $K=1$  (نقطه-خط، قرمز)،  $K=5$  (خط چین، آبی)،  $K=12$  (نقطه چین، مشکی)).

در شکل ۵ به ازای حالت اولیه  $|\psi_+(0)\rangle$  به وضوح دیده می‌شود که در غیاب حرکت اتمی در حضور برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی هر چند که در نهایت واهمدوسی اتفاق می‌افتد، اما با افزایش آن فرایند میرایی درهم‌تنیدگی