بیست و چهارمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و
دهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۱۰ الی ۱۲ بهمن ۹۶ – دانشگاه شهرکرد
24th Iranian Conference on Optics and Photonics (ICOP 2018) and
9th Iranian Conference on Photonics Engineering and Technology (ICPET 2018)
Jan 30 - Feb 1 , 2018 - Shahrekord University

بررسی تابش چرنکوف نسبیتی بر حسب شکل صریح تابع گرین

مریم محمدی خشویی

Mohamady_maryam@yahoo.com

دانشگاه زنجان

چکیده – در این مقاله به بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی الکتریک مغناطیده همگن سه بعدی برحسب شکل صریح تابع گرین پرداخته می شود . گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی محیط به صورت توابع مختلطی از فرکانس که روابط کرامرز- کرونیک را ارضا می کند، فرض می شوند. در این مقاله برای کوانتش میدان با تلفیق معادلات ماکسول در پیمانه کولنی و پتانسیل اسکالر صفر، معادله موج را برای پتانسیل برداری به دست آورده میشود. هامیلتونی جدید برهم کنش را که متفاوت از حالت غیرنسبیتی آن است با استفاده از پتانسیل برداری کوانتیزه شده و عملگر میدان ذره که از کوانتش مرتبه دوم به دست آمده معرفی می شود. مولفه های پتانسیل برداری بر حسب تابع گرین محاسبه می شود. با استفاده از رابطه احتمال گذار از قاعده طلایی فرمی آهنگ اتلاف انرژی الکترون حاصل از این تابش را محاسبه می شود. نتایج حاصله با کارهای پیشین مقایسه می شود.

کلید واژه-آهنگ اتلاف انرژی، تابش چرنکوف نسبتی، قاعده طلایی فرمی.

Relativistic Cerenkov Radiation in the form of explicit Green's function in a Magneto-Dielectric media

Maryam Mohammadi K.

Zanjan University

Abstract- Abstract- In this paper relativistic Cerenkov radiation was studied in the form of explicit Green's function in a 3-D magneto-dielectric medium.The dielectric function permeability of the medium are assumed to satisfy Kramers-Kronig equations. In order to quantize electromagnetic field with integration of the Maxwell's equations in the coulomb gauge and a zero scalar potential, wave equation for vector potential is achieved. we use Fourier transform to solve the equation in Momentum space. It is introduced the new intraction Hamiltonian which is different from Hamiltonian term in non-relativistic state based on quantized electromagnetic field and second quantization method. components of the vector potential is calculated in terms of the Green's function.It is calculated the losing energy longitudinal with using the transition probability term in the Fermi"s golden rule. It is remarkable that the lateral component isn't different in the relativistic state.The results will be compared with earlier work(non- relativistic and non-magneto).

Keywords: Cerenkov radiation, Fermie's golden rule.

۱- مقدمه

برای اولین بار تابش چرنکوف در تحقیقات مواد رادیواکتیویته مشاهده شده بود[۱, ۲]. چرنکوف نشان داد منشاء این تابش، الکترون پرانرژی است که در محیط مادی با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط حرکت و طی این فرآیند فوتون گسیل می کند[۳]. برای بررسی تابش چرنکوف سیستم، یک الکترون در حال برهم کنش با میدان الکترومغناطیسی در محیط دی الکتریک مغناطیده در نظر گرفته می شود. [۴]. برخی از پدیده ها از جمله تابش چرنکوف در خلاء امکان پذیر نیست، لذا در این مقاله به بررسی کوانتش میدان در محیط مادی پرداخته می شود. هر محـیط مادی توسط تابع دی الکـتریک و تابع مغناطیدگی توصیف می شود. اصل علیت ایجاب می کند که هر دو تابعی مختلط از فرکانس باشند[۵]. قسمت حقیقـی آن خاصیت پاشندگـی و قسمت موهومـی آن خاصیت اتلافـی مـحیط را موجب می شود. این دو قسمت با روابط کرامرز- کرونیگ به هم وابسته اند. ضریب شکست مختلط در این محیط به صورت زیر تعریف می شود:[۵]

$$n\left(\boldsymbol{r},\omega\right)=\varepsilon\left(\boldsymbol{r},\omega\right)\mu\left(\boldsymbol{r},\omega\right) \qquad (۱)$$

۲- ۲- کوانتش میدان الکترومغناطیسی

در گذار از الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتومی اولین گام کوانتیزه کردن میدان است. روشهای متفاوتی برای کوانتش میدانهای الکترومغناطیسی وجود دارد. از آن جمله می توان کوانتیزه کردن میدان بر حسب توابع مد، استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ و تابع گرین را نام برد. در این مقاله برای کوانتش میدان با تلفیق معادلات ماکسول در پیمانه کولنی و پتانسیل اسکالر صفر، معادله موج را برای پتانسیل برداری می توان به دست آورد. برای حل معادله با استـفاده از تبدیل فوریه پتانســیل برداری در فضای اندازه حرکت محاسبه و معادله موج به یک معادله جبری (۲)تبدیل می شود. که در آن $\tilde{\boldsymbol{k}}$ یک بردار یکه است. تکرار اندیس β نشان دهنده جمع روی مؤلفه‌های کارتزین x,y,z است.

$$\left\{\left[k^2c^2\kappa\left(\omega\right)-\omega^2\varepsilon\left(\omega\right)\right]\delta_{\alpha\beta}-k^2c^2\kappa\left(\omega\right)\tilde{k}_\alpha\tilde{k}_\beta\right\}\hat{A}^+_\beta\left(k,\omega\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{J}^+_\alpha\left(k,\omega\right) \qquad (۲)$$

. از طرفی می توان مؤلفه های پتانسیل برداری را از رابطهٔ (۳) به دست آورد

$$\hat{A}^+_\alpha\left(k,\omega\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}G_{\alpha\beta}\left(k,\omega\right)\hat{J}^+_\beta\left(k,\omega\right) \qquad (۳)$$

که در آن $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k},\omega)$ تبدیـل فوریـهٔ $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)$ و تانـسور گریـن می باشد. تجزیه پتانسیل برداری به مؤلفه های طولی و عرضی، انجام محاسبات را آسان تر می کند. با جایگذاری رابطه ۳ در ۲ و ضرب اپراتورهای تصویر طولی $\tilde{k}_\gamma\tilde{k}_\alpha$ و عرضی $\delta_{\gamma\alpha}-\tilde{k}_\gamma\tilde{k}_\alpha$ از سمت چپ معادله حاصل، مولفه های طولی و عرضی تانسور گرین به شکل زیر به دست می آیند:

$$G^L_{\alpha\beta}\left(k,\omega\right)=-\frac{\tilde{k}_\alpha\tilde{k}_\beta}{\omega^2\varepsilon\left(\omega\right)} \qquad (۴)$$

$$G^T_{\alpha\beta}\left(k,\omega\right)=\frac{\delta_{\alpha\beta}-\tilde{k}_\alpha\tilde{k}_\beta}{k^2c^2\kappa\left(\omega\right)-\omega^2\varepsilon\left(\omega\right)} \qquad (۵)$$

با جایگذاری در رابطه (۳) و با استفاده از تبدیل فوریه پتانسیل برداری به شکل زیر به دست می آید.

$$\hat{\boldsymbol{A}}^\Omega_\alpha\left(\boldsymbol{r},t\right)=\left(\frac{\hbar}{4\pi^3\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}d\omega\int d^3\boldsymbol{k}\left\{\boldsymbol{G}^\Omega_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)\hat{\boldsymbol{J}}_\beta\left(\boldsymbol{k},\omega\right)exp\left[-i\left(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]-H\cdot c\right\} \qquad (۶)$$

که در آن $\Omega=L,T$ نشان دهنده مؤلفه های طولی و عرضی است. به دلیل آنکه عبارت مولفه طولی برای حالت مغناطیده و غیر مغناطیده یکسان است در بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی الکتریک جاذب و مغناطیده تنها پتانسیل عرضی مورد توجه قرار داده می شود[۶]. قابل ذکر است که پتانسیل برداری بالا در روابط جابه جایی کانونیک صدق می کند که شرط کوانتش میدان است.

$$\left[\hat{\boldsymbol{A}}^T_\alpha(\boldsymbol{r},t),\ -\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{E}}^T_\beta(\boldsymbol{r}',t)\right]=i\hbar\delta^T_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (۷)$$

۳- کوانتش مرتبه دوم

می توان میدان تابشی را با خواص ذره‌ای توصیف کرد. این مطلب ایده‌ای خواهد بود برای آنکه میدان تابشی الـکترون نیز کوانتیزه شود که به آن کوانتش مرتبه دوم می گویند. بدین منظور با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی برای معادله دیراک ،که نسبیتی است، ویژه مقادیر آن محاسبه می شود و بر اساس ویژه مقادیر به دست آمده میدان تابشی الکترون بسط داده می شود. ضرایب بسط در واقع عملگرهایی خواهند بود که مربوط به خلق یا نابودی الکترون می باشند. $\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)$ عملگر بوزونی فنا و همچنین $\hat{\boldsymbol{b}}^{+}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)$ عملگر بوزونی خلق الکترونی با تکانه $\boldsymbol{p}$ نامیده و در نهایت $\boldsymbol{\psi}$ و $\boldsymbol{\psi}^{+}$ کوانتیزه می‌شوند و با تعمیم آن به حالت پیوسته سه بعدی به شکل زیر در می آیند[۵] .

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\lambda}\int d^{3}\boldsymbol{p}\,\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)\psi_{\lambda}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \qquad (8)$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^{+}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\lambda}\int d^{3}\boldsymbol{p}\,\hat{\boldsymbol{b}}^{+}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)\psi^{+}_{\lambda}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \qquad (9)$$

که در آن: [۲]

$$\psi_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{u}_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\,e^{i\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}} \qquad (10)$$

۴- هامیلتونی برهم کنش

هامیلتونی نسبیتی برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی در تابش مورد نظر ما بدین شکل است[۲]

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{I}=-ec\int d^{3}\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\psi}^{+}\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\psi} \qquad (11)$$

که در آن $\boldsymbol{\psi}$عملگر میدان ذره می باشد. با جایگذاری به شکل رابطه (۱۲) در می آید.

۵- احتمال گسیل فوتون

در این پژوهش، در بررسی تابش چرنکوف فرض می‌شود که تعداد فوتونها در حالتی که سیستم مختل نشده است، صفر باشد و پس از گسیل تنها یک فوتون تولید شود. با

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{I}=-ec\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3}\left(\frac{\hbar}{4\pi^{2}\varepsilon_{0}}\right)^{\frac{1}{2}}\int d^{3}\boldsymbol{r}\int_{0}^{+\infty}d\omega$$
$$\int d^{3}\boldsymbol{k}\int d^{3}\boldsymbol{p}\int d^{3}\boldsymbol{p}'\,\hat{\boldsymbol{b}}^{+}_{\lambda'}(\boldsymbol{p}',t)\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$\left(\boldsymbol{u}^{+}_{\lambda'}(\boldsymbol{p}',t)\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}^{+}_{\beta}(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{u}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)\right)$$
$$\left\{\boldsymbol{G}^{*\Omega}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)\,exp\left[-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]-H\cdot c\right\} \qquad (12)$$

داشتن اطلاعات فوق می‌توان احتمال گسیل فوتون در واحد زمان توسط الکترونی که با سرعت $\boldsymbol{v}$ در محیط حرکت می‌کند را به دست آورد. بدین منظور از قاعده طلایی فرمی استفاده می‌شود. اگر سیستم ابتدا در حالت اولیه $|i\rangle$ با انرژی E_i باشد، احتمال در واحد زمان برای آنکه سیستم در حالت نهایی $|f\rangle$ با انرژی E_f یافت شود، طبق قاعده فرمی به صورت زیر محاسبه می‌شود[۲]:

$$\left(\frac{trans.porb}{time}\right)=\frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{fi}\right|^{2}\delta\left(E_f-E_i\right) \qquad (13)$$

در رابطه بالا، V_{fi} عنصر ماتریس اختلال است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left|\langle f|\hat{H}_{I}|I\rangle\right|^{2}=\left(\frac{\hbar c^{2}}{4\pi^{2}\varepsilon_{0}}\right)\sum_{s}\int d\omega\int d^{3}\boldsymbol{k}\int d^{3}\boldsymbol{p}$$
$$\left|\boldsymbol{u}^{+}_{\lambda'}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{\alpha}\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_{s}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{u}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)\right|^{2}Im\,G^{T}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega) \qquad (14)$$

قسمت موهومی تانسور گرین عرضی به صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{G}^{T}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{\omega^{2}\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)+\boldsymbol{k}^{2}\boldsymbol{c}^{2}\,\mathrm{Im}\,\kappa(\omega)}{\left|\boldsymbol{k}^{2}\boldsymbol{c}^{2}\kappa(\omega)-\omega^{2}\varepsilon(\omega)\right|^{2}} \qquad (15)$$

بنابراین:

$$\left(\frac{transprob}{time}\right)_{p+k,\lambda'\to p,\lambda}=$$
$$\frac{2\pi}{\hbar}e^{2}c^{2}\left(\frac{\hbar}{8\pi^{4}\varepsilon_{o}}\right)\frac{\omega^{2}\varepsilon_{i}(\omega)+k^{2}c^{2}k_{i}(\omega)}{\left|k^{2}c^{2}k(\omega)-\omega^{2}\varepsilon(\omega)\right|^{2}} \qquad (16)$$
$$\left|u^{+}_{\lambda'}(p+k,r)a.\tilde{e}_{s}(k)u_{\lambda}(p,r)\right|^{2}$$
$$\delta\left(\sqrt{\hbar^{2}c^{2}\left|p+k\right|^{2}+m^{2}c^{4}}-\sqrt{\hbar^{2}c^{2}p^{2}+m^{2}c^{4}}-\hbar\omega\right)$$

۶- آهنگ اتلاف انرژی سیستم در واحد طول

احتمال گسیل یک فوتون با فرکانس ω_k و پلاریزاسیون σ در واحد زمان محاسبه شد. اگر این احتمال در انرژی یک فوتون ضرب شود در واقع آن مقدار انرژی که سیستم در واحد زمان از دست می‌دهد تا فوتونی با بردار موج k و پلاریزاسیون σ خلق شود، را به دست آورده‌ایم. از سوی دیگر فوتونهای بی شماری با فرکانسها و پلاریزاسیون های مختلفی تولید می‌شود، از این رو کافی است آهنگ از دست دادن انرژی در واحد زمان را به ازای فرکانسها و پلاریزاسیون‌های مختلف به دست آورده و سپس آنها را با هم جمع کرد. پس جمع نهایی باید شامل یک جمع روی اسپین‌های نهایی الکترون باشد و روی اسپین اولیه میانگین‌گیری کرد که ضریب $\frac{1}{2}$ ظاهر می‌شود و به سادگی می‌توان آهنگ از دست دادن انرژی در واحد طول را به روش زیر محاسبه کرد:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{1}{v}\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k\,\hbar\omega_k\left(\frac{\text{transprob}}{\text{time}}\right) \quad (۱۷)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در (۱۷) رابطه زیر به دست می-آید:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon_o}\int\omega\,d\omega\int k\,dk\quad\frac{\omega^2\varepsilon_i(\omega)+k^2c^2\kappa_i(\omega)}{\left|k^2c^2\kappa(\omega)-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}$$
$$\left(1-\frac{\omega^2}{k^2v^2}\left(1+\frac{\hbar\omega}{2mc^2}\left(\frac{c^2k^2}{\omega^2}-1\right)\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2\right) \quad (۱۸)$$

عبارت (۱۹) [۶] انرژی اتلافی الکترون غیرنسبیتی در واحد طول برای محیط های دی الکتریک همـگن سه بعدی است،

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_{\text{دی الکتریک}}=\frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon_o}\int\omega\,d\omega\int dk \quad ((۱۹)$$
$$\frac{k\,\omega^3\varepsilon_i(\omega)}{\left|k^2c^2-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}\left(1-\left(\frac{\omega}{kv}+\frac{\hbar k}{2mv}\right)^2\right)$$

حال عبارت (۱۸) با عبارت (۱۹) به صورت دیفرانسـیلی(۲۰) مـقایسه می شود. در واقع عبارت (۱۸) نشان‌دهنده تصحیح نسبیتی برای محیط دی‌الکتریک مغناطیده است. این نسبت برای سرعتهای پایین در اکثر

$$\frac{\left.\frac{dW}{dx\,d\omega\,dk}\right|_{\text{دی الکتریک مغناطیده}}}{\left.\frac{dW}{dx\,d\omega\,dk}\right|_{\text{دی الکتریک}}}=\frac{\omega^2\varepsilon_i+k^2c^2\kappa_i}{\omega^2\varepsilon_i}\,\frac{\left|k^2c^2-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}{\left|k^2c^2\kappa(\omega)-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}$$
$$\times\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{k^2v^2}\left(1+\frac{\hbar\omega}{2mc^2}\left(\frac{c^2k^2}{\omega^2}-1\right)\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega}{kv}+\frac{\hbar k}{2mv}\right)^2\right)} \quad (۲۰)$$

نقاط برابر یک است که با انتظار ما توافق خوبی دارد. هرچه سرعت الکترون به سمت سرعتهای بالا می‌رود، نسبت از یک فاصله می‌گیرد.

۷- نتیجه گیری

با توجه به کاربرد وسیع استفاده از تابش چرنکوف در آشکارسازی ذرات در این پژوهش انرژی اتلافی سیستم در واحد طول را برای تابش چرنکوف نسبیتی به دست آوردیم. محیط را دی الکتریک و مغناطیده در نظر گرفتیم. با انجام محاسبات می توان نشان داد که روابط به دست آمده تعمیم روابط گذشته (آهنگ اتلاف انرژی در محیط دی الکتریک که درآن الکترون با سرعت غیر نسبیتی حرکت می کند) است.

مراجع

[۱] B. M. Bolotovskii, Vavilov–Cherenkov radiation: its discovery and application, *Physics-Uspekhi*, Vol. 52, No. 11, pp. 1099-1110, 2009 .

[۲] ع. احمدي, مكانيسم توليد و ويژگی هاي تابش چرنكوف در ناحيه اشعه ايكس نرم, مجله سنجش و ايمنی پرتو, Vol. ۱۳۹٤, زمستان ۱, شمارهٔ ٤، جلد .

[۳] P. A. Cherenkov, Visible emission of clean liquids by action of γ radiation, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, Vol. 2, pp. 451, 1934 .

[٤] I. M. Frank, I. Tamm, Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter, *Usp. Fiz .Nauk*, Vol. 93, pp. 388-393, 1937 .

[٥] E. G. Harris, *A pedestrian approach to quantum field theory*: Courier Corporation, 2014 .

[٦] R. Matloob, A. Ghaffari, Čerenkov radiation in a causal permeable medium, *Physical Review A*, Vol. 70, No. 5, pp. 052116 ,2004 .