



چلانندگی آنتروپی موقعیت-تکانه در برهم کنش یک اتم سه تراز با یک میدان

دومدی

محمد جواد فقیهی^{۱،۲}، محمد کاظم توسلی^۱ و مالک باقری هارونی^۴

^۱ گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^۲ آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی و رمزنگاری، دانشگاه یزد، یزد

^۳ گروه فیزیک و فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان

^۴ گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان

چکیده - در این مقاله، برهم کنش یک اتم سه تراز با نوع Λ با دو میدان تابشی کوانتیده مورد بررسی قرار می گیرد. میدان ها هم زمان وارد کاواکی می شوند که یک محیط کر آن را فرا گرفته است. با در نظر گرفتن یک تبدیل کانونیک، شکل دقیق و تحلیلی تابع موج سامانه فیزیکی مورد بررسی به دست می آید. در آخر، چلانندگی آنتروپی موقعیت-تکانه ارزیابی می شود.

کلید واژه- برهم کنش اتم- میدان، برهم کنش میدان- میدان، اتم سه تراز، میدان دو مدی، چلانندگی آنتروپی موقعیت-تکانه.

Position-Momentum Entropic Squeezing of a Three-Level Atom Interacting with a Bimodal Cavity Field

Mohammad Javad Faghihi^{1,2,3}, Mohammad Kazem Tavassoly^{1,2} and Malek Bagheri Harouni⁴

¹ Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

² The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd

³ Physics and Photonics Department, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman

⁴ Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- In this paper, the interaction between a Λ -type three-level atom and two quantized radiation fields is studied. The fields are simultaneously injected in a bichromatic cavity surrounded by a Kerr medium. By applying a canonical transformation, the explicit form of the wave function of the considered physical system is analytically evaluated. Finally, position-momentum entropic squeezing is examined.

Keywords: Atom-field interaction, Field-field interaction, Three-level atom, Bimodal field, Position-momentum Entropic squeezing.

۱- مقدمه

مدل جینز-کامینگز [۱]، برای توصیف کوانتومی برهم‌کنش‌های اتم-میدان، الگویی دقیق را از برهم‌کنش بین یک اتم دوترازی با میدان الکترومغناطیسی تک‌مد در تقریب موج چرخان ارائه می‌کند. سادگی نسبی این مدل، به‌همراه ظهور پدیده‌های شگفت‌انگیز با ویژگی‌های قابل توجه از جمله مشاهده‌ی فروافت و بازیافت در وارونی جمعیت ترازهای اتمی [۲] که به تأیید تجربی نیز رسیده است [۳]، این مدل را در مرکز این زمینه‌ی پژوهشی قرار داده است.

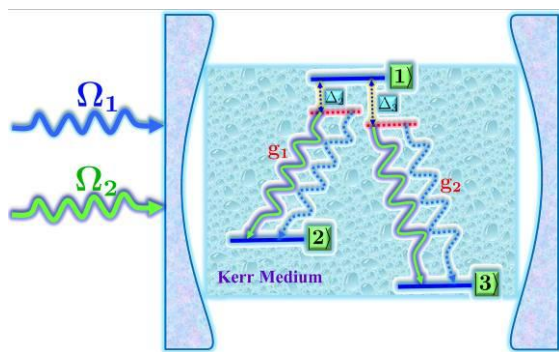
به منظور توسعه‌ی مدل جینز-کامینگز، تعمیم‌های گوناگونی از جمله اتم‌های چندترازی، میدان‌های چندمدی، گذارهای چندفوتونی و... در دهه‌های اخیر ارائه شده است. همچنین، به‌عنوان تعمیمی دیگر -که مورد توجه پژوهش حاضر نیز هست- می‌توان فرض کرد که دو میدان کوانتیده‌ی جفت‌شده به‌طور هم‌زمان وارد یک کاواک دومدی شوند. در نتیجه، صرف‌نظر از برهم‌کنش مدهای میدان با یکدیگر که می‌تواند تبدیل معکوس پارامتری^۱ را به‌دنبال داشته باشد، اگر یک اتم وارد این کاواک شود می‌تواند با هر دو مد میدان برهم‌کنش کند [۴]. مبنای فیزیکی پژوهش حاضر در همین نکته نهفته است.

در این مجال، مدلی برای برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی با دو میدان کوانتیده‌ی جفت‌شده ارائه می‌شود. فرض می‌شود برهم‌کنش در چنان کاواکی انجام شود که یک محیط غیرخطی بر آن نیز در بر گرفته است. در ادامه، تحت شرایط اولیه‌ای که برای اتم و میدان در نظر گرفته می‌شود، شکل صریح تابع موج سامانه به‌طور دقیق محاسبه می‌گردد. در آخر، چلانگی آن‌تروپی موقعیت-تکانه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نشان‌داده شده است که آن‌تروپی می‌تواند به‌عنوان معیاری برای بررسی چلانگی افت‌وخیزهای کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد [۵].

۲- فرمول‌بندی نظری

از دیدگاه مکانیک کوانتومی، تابع موج یک سامانه‌ی فیزیکی خاستگاه اطلاعات ممکن آن سامانه است. یافتن

این مهم با در نظر گرفتن همه‌ی برهم‌کنش‌های موجود بین زیرسامانه‌ها، تشکیل هامیلتونی مناسب و در نهایت با بررسی تحول زمانی آن میسر می‌شود. سامانه‌ی فیزیکی حاضر شامل یک اتم سه‌ترازی در پیکربندی نوع Λ است که با دو میدان کوانتومی جفت‌شده با بسامد نوسانات Ω_1 و Ω_2 در یک کاواک اپتیکی شامل محیط کر برهم‌کنش می‌کند (شکل ۱).



شکل ۱: برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک میدان دومدی در یک کاواک شامل محیط کر.

در سامانه‌ی اتمی مورد بررسی، ترازهای اتمی با نماد $|j\rangle$ و انرژی ω_j نشان‌داده می‌شوند که در آن گذار $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ گذار ممنوع است. از این‌رو، سامانه‌ی حاضر با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF} \quad (1)$$

که در آن عبارتهای مربوط به اتم و میدان به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{H}_A &= \sum_{j=1}^3 \omega_j \hat{\sigma}_{jj}, \\ \hat{H}_F &= \sum_{j=1}^2 \left(\Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \chi_j \hat{a}_j^{\dagger 2} \hat{a}_j^2 \right) \\ &\quad + \chi_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + g_{12} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \end{aligned} \quad (2)$$

و سهم برهم‌کنش عبارت است از:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{AF} &= \sum_{j=1}^2 \left[g_1^{(j)} (\hat{a}_j \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{a}_j^\dagger) \right. \\ &\quad \left. + g_2^{(j)} (\hat{a}_j \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{a}_j^\dagger) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط بالا، عملگر نردبانی اتمی به‌صورت $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ تعریف می‌شود. $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش، $g_1^{(j)}$ و $g_2^{(j)}$ ثابت‌های جفت‌شدگی بین اتم-

¹ Parametric down conversion

که در آن

$$\mu = g\sqrt{1+\delta^2}, \gamma = \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu_1^{(2)}}, \quad (8)$$

$$\Delta_k = \Omega_2 - (\omega_1 - \omega_k), \quad k = 2, 3$$

برای سادگی فرض کرده‌ایم $g_1^{(2)} = g$. به منظور مطالعه‌ی دینامیک سامانه، تابع موج سامانه در هر لحظه‌ی دلخواه t به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} q_n q_m [A(n, m, t)|1, n, m\rangle \\ & + B(n, m+1, t)|2, n, m+1\rangle \\ & + C(n, m+1, t)|3, n, m+1\rangle] \end{aligned} \quad (9)$$

که در این رابطه q_n و q_m دامنه‌ی احتمال اولیه میدان‌های کاواک و A, B, C دامنه‌های احتمال اتمی هستند. با استفاده از روش دامنه‌ی احتمال [۶]، ضرایب A, B, C به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A(t) = & -\sum_{k=1}^3 (\mathcal{G}_k + V_2) Y_k e^{i(\mathcal{G}_k - \Delta_2)t}, \\ B(t) = & f_1 \sum_{k=1}^3 Y_k e^{i\mathcal{G}_k t}, \\ C(t) = & \frac{1}{f_2} \sum_{k=1}^3 [(\mathcal{G}_k + V_2)(\mathcal{G}_k + V_1 - \Delta_2) - f_1^2] \\ & \times Y_k e^{i(\mathcal{G}_k + \Delta_3 - \Delta_2)t} \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن

$$\mathcal{G}_k = -\frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}(x_1^2 - 3x_2)^{1/2} \cos\left[\varphi + \frac{2\pi(k-1)}{3}\right], \quad (11)$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{9x_1x_2 - 2x_1^3 - 27x_3}{2(x_1^2 - 3x_2)^{3/2}} \right], \quad k = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} x_1 = & V_1 + 2V_2 + \Delta_3 - 2\Delta_2 \\ x_2 = & (V_1 + V_2 - \Delta_2)(V_2 + \Delta_3 - \Delta_2) + V_2(V_1 - \Delta_2) - f_1^2 - f_2^2, \\ x_3 = & V_2[(V_1 - \Delta_2)(V_2 + \Delta_3 - \Delta_2) - f_1^2 - f_2^2] - f_1^2(\Delta_3 - \Delta_2), \\ V_1 = & \chi[n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1) + 2n_1n_2], \\ V_2 = & \chi[n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 + 1) + 2n_1(n_2 + 1)], \\ f_1 = & \mu\sqrt{n_2 + 1}, \quad f_2 = \gamma f_1 \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین، با فرض این که اتم در حالت برانگیخته باشد، ضرایب Y_k به شکل زیر به دست می‌آیند:

میدان برای مد z ام هستند و g_{12} به ثابت جفت‌شدگی در برهم‌کنش میدان-میدان اشاره دارد. همچنین، $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ پذیرفتاری‌های محیط کر را نشان می‌دهند.

به منظور بررسی دینامیک سامانه‌ی کوانتومی حاضر، از روش دامنه‌ی احتمال استفاده می‌کنیم [۶]. پیش از آن، لازم است که از تبدیلات کانونیک زیر بهره‌مند شویم:

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1 \cos \theta + \hat{b}_2 \sin \theta, \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2 \cos \theta - \hat{b}_1 \sin \theta \quad (4)$$

در این رابطه عملگرهای $\hat{b}$ و $\hat{b}^\dagger$ مشابه عملگرهای بوزونی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ رفتار می‌کنند. همچنین، θ پارامتری است که با توجه به ویژگی‌های هامیلتونی سامانه تعیین خواهد شد. با جانشینی تبدیلات کانونیک (۴) در هامیلتونی سامانه، شکل نهایی آن به شکل زیر به دست می‌آید:

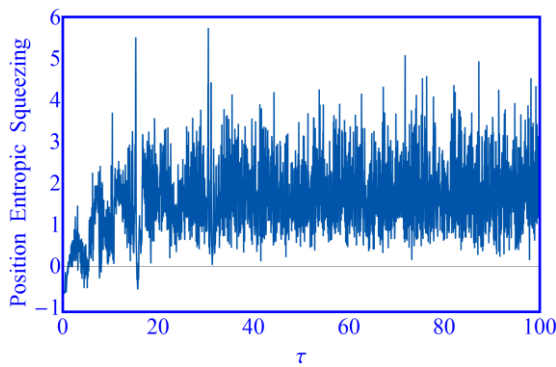
$$\begin{aligned} H = & \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \\ \hat{H}_0 = & \sum_{j=1}^3 \omega_j \hat{\sigma}_{jj} + \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \\ \hat{H}_1 = & \chi \sum_{j=1}^2 \hat{b}_j^{\dagger 2} \hat{b}_j^2 + 2\chi \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \\ & + \sum_{j=1}^2 [\mu_1^{(j)} (\hat{b}_j \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{b}_j^\dagger) \\ & + \mu_2^{(j)} (\hat{b}_j \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{b}_j^\dagger)] \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن فرض کرده‌ایم $\chi_1 = \chi_2 = \chi = \frac{\chi_{12}}{2}$. همچنین

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \Omega_1 \cos^2 \theta + \Omega_2 \sin^2 \theta - g_{12} \sin 2\theta, \\ \Omega_2 = & \Omega_1 \sin^2 \theta + \Omega_2 \cos^2 \theta + g_{12} \sin 2\theta, \\ \mu_k^{(1)} = & g_k^{(1)} \cos \theta - g_k^{(2)} \sin \theta, \\ \mu_k^{(2)} = & g_k^{(1)} \sin \theta + g_k^{(2)} \cos \theta, \quad k = 1, 2, \\ \theta = & \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2g_{12}}{\Omega_2 - \Omega_1} \right), \\ g_{12} = & \frac{\delta(\Omega_2 - \Omega_1)}{1 - \delta^2}, \quad \frac{g_1^{(1)}}{g_1^{(2)}} = \delta = \frac{g_2^{(1)}}{g_2^{(2)}} \end{aligned} \quad (6)$$

در ادامه، مناسب است که محاسبات خود را در تصویر برهم‌کنش دنبال کنیم. در نتیجه، هامیلتونی سامانه به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} V_I(t) = & \mu(\hat{b}_2 \hat{\sigma}_{12} e^{-i\Delta_2 t} + \gamma \hat{b}_2 \hat{\sigma}_{13} e^{-i\Delta_3 t}) + \text{h.c.} \\ & + \chi \hat{b}_1^{\dagger 2} \hat{b}_1^2 + \chi \hat{b}_2^{\dagger 2} \hat{b}_2^2 + 2\chi \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \end{aligned} \quad (7)$$



شکل ۳: چلانگی آنتروپی برحسب زمان مشخصه $\tau = gt$ در حالت تشدید بازای $|\alpha|^2 = 10 = |\beta|^2$ ، $\delta = 0.1$ ، $\gamma = 1$ و $\chi = 0.4$.

۴- نتیجه گیری

نمودارهای ارائه شده چلانگی آنتروپی موقعیت را برای دو وضعیت متفاوت نشان می دهند. با توجه به شکل ۳، روشن است که وجود محیط کر به شدت این ویژگی غیرکلاسیکی را از بین می برد حال آن که در نبود آن (شکل ۲)، سامانه ی کوانتومی مورد بررسی چلانگی آنتروپی موقعیت را به روشنی در تمام زمان ها از خود نشان می دهد.

مراجع

- [1] Jaynes E.T. and Cummings F.W. **Proc. IEEE.** 51 (1963) 89;
- Cummings F.W. **Phy. Rev.** 140 (1965) A1051.
- [2] Shore B.W. and Knight P.L. **J. Mod. Opt.** 40 (1993) 1195.
- [3] G. Rempe G., Walther H. and Klein N. **Phys. Rev. Lett.** 54 (1985) 551.
- [4] Abdalla M.S., Obada A.-S.F. and Abdel-Aty M. **Ann. Phys.** 318 (2005) 266;
- Abdel-Aty M., Abdalla M.S. and Sanders B.C. **Phys. Lett. A** 373 (2009) 315.
- [5] Orłowski A. **Phys. Rev. A** 56 (1997) 2545.
- [6] Scully M.O. and Zubairy M.S. “*Quantum Optics*”, Cambridge: Cambridge University Press, (2007);
- Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 45 (2012) 035502;
- Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. **J. Opt. Soc. Am. B** 30 (2013) 2810.
- [7] Shannon C.E. and Weaver W. “*The Mathematical Theory of Communication*”, University of Illinois Press, Urbana, (1949).
- [8] Faghihi M.J., Tavassoly M.K. and Hooshmandasl M.R. **J. Opt. Soc. Am. B** 30 (2013) 1109.

$$Y_k = \frac{g_i + g_j + V_1 + V_2 - \Delta_2}{(g_k - g_i)(g_k - g_j)}, \quad k \neq i \neq j = 1, 2, 3 \quad (13)$$

۳- چلانگی آنتروپی موقعیت-تکانه

با تعیین دقیق ضرایب، شکل صریح تابع موج وابسته به زمان متناظر با سامانه ی مورد بحث، به دست آمده است. بنابراین می توان هر کمیت فیزیکی مورد علاقه را بررسی، و تجزیه و تحلیل نمود. در این جا تنها به مطالعه ی چلانگی آنتروپی موقعیت-تکانه می پردازیم.

با توجه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و با در نظر گرفتن ایده ی شانون [۷]، شکل دیگری از اصل عدم قطعیت برای آنتروپی به صورت $\delta x \delta p \geq \pi e$ معرفی می شود که در آن δp و δx توابع نمایی آنتروپی های شانون مربوط به توزیع های احتمالاتی p و x هستند که به شکل زیر تعریف می شوند:

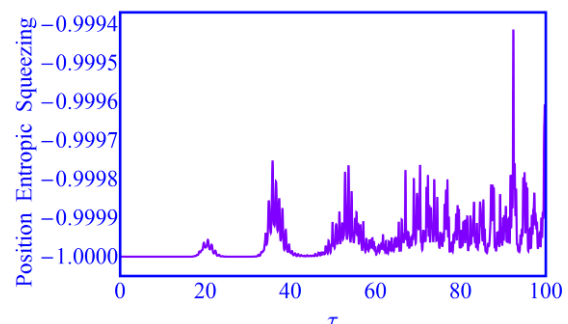
$$\delta x = \exp \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x | \hat{\rho}_F | x \rangle \ln \langle x | \hat{\rho}_F | x \rangle dx \right), \quad (11)$$

$$\delta p = \exp \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p | \hat{\rho}_F | p \rangle \ln \langle p | \hat{\rho}_F | p \rangle dp \right)$$

که در آن $\hat{\rho}_F = \text{Tr}_A(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$ مشخص کننده ی عملگر چگالی کاهش یافته ی میدان است. با تعریف دو کمیت به صورت

$$E_x = (\delta x / \sqrt{\pi e}) - 1, \quad E_p = (\delta p / \sqrt{\pi e}) - 1 \quad (12)$$

و به پیروی از رهیافت ارائه شده در [۸]، شرط چلانگی آنتروپی موقعیت (تکانه) $-1 < E_p < 0$ ، $-1 < E_x < 0$ خواهد بود.



شکل ۴: چلانگی آنتروپی برحسب زمان مشخصه $\tau = gt$ در حالت تشدید بازای $|\alpha|^2 = 10 = |\beta|^2$ ، $\delta = 0.1$ ، $\gamma = 1$ و $\chi = 0$.