بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

چلاندگی آنتروپی موقعیت-تکانه در برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی با یک میدان دومدی

محمّد جواد فقیهی[۱و۲و۳]، محمّد کاظم توسّلی[۱و۲] و مالک باقری هارونی[۴]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] آزمایشگاه پردازش اطّلاعات کوانتومی و رمزنگاری، دانشگاه یزد، یزد
[۳] گروه فیزیک و فوتونیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان
[۴] گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان

چکیده – در این مقاله، برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با دو میدان تابشی کوانتیده مورد بررسی قرار می‌گیرد. میدان‌ها هم‌زمان وارد کاواکی می‌شوند که یک محیط کِر آن را فراگرفته است. با در نظر گرفتن یک تبدیل کانونیک، شکل دقیق و تحلیلی تابع موج سامانه فیزیکی مورد بررسی به‌دست می‌آید. در آخر، چلاندگی آنتروپی موقعیت-تکانه ارزیابی می‌شود.

کلید واژه- برهم‌کنش اتم- میدان، برهم‌کنش میدان- میدان، اتم سه‌ترازی، میدان دو مدی، چلاندگی آنتروپی موقعیت-تکانه.

Position-Momentum Entropic Squeezing of a Three-Level Atom Interacting with a Bimodal Cavity Field

Mohammad Javad Faghihi[1,2,3], Mohammad Kazem Tavassoly[1,2] and Malek Bagheri Harouni[4]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[2] The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd
[3] Physics and Photonics Department, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman
[4] Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- In this paper, the interaction between a Λ- type three-level atom and two quantized radiation fields is studied. The fields are simultaneously injected in a bichromatic cavity surrounded by a Kerr medium. By applying a canonical transformation, the explicit form of the wave function of the considered physical system is analytically evaluated. Finally, position-momentum entropic squeezing is examined.

Keywords: Atom-field interaction, Field-field interaction, Three-level atom, Bimodal field, Position-momentum Entropic squeezing.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-04]

۱- مقدمه

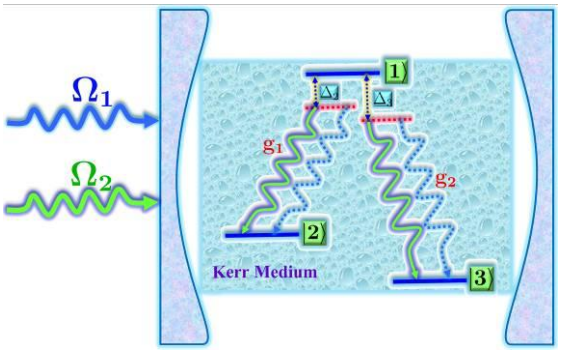
مدل جینز-کامینگز [۱]، برای توصیف کوانتومی برهم‌کنش‌های اتم-میدان، الگویی دقیق را از برهم‌کنش بین یک اتم دوترازی با میدان الکترومغناطیسی تک‌مد در تقریب موج چرخان ارائه می‌کند. سادگی نسبی این مدل، به‌همراه ظهور پدیده‌های شگفت‌انگیز با ویژگی‌های قابل توجّه از جمله مشاهده‌ی فروافت و بازیافت در وارونی جمعیت ترازهای اتمی [۲] که به تأیید تجربی نیز رسیده است [۳]، این مدل را در مرکز این زمینه‌ی پژوهشی قرار داده است.

به منظور توسعه‌ی مدل جینز-کامینگز، تعمیم‌های گوناگونی از جمله اتم‌های چندترازی، میدان‌های چندمدی، گذارهای چندفوتونی و... در دهه‌های اخیر ارائه شده است. همچنین، به‌عنوان تعمیمی دیگر -که مورد توجّه پژوهش حاضر نیز هست- می‌توان فرض کرد که دو میدان کوانتیده‌ی جفت‌شده به‌طور هم‌زمان وارد یک کاواک دومدی شوند. در نتیجه، صرف‌نظر از برهم‌کنش مدهای میدان با یکدیگر که می‌تواند تبدیل معکوس پارامتری[1] را به‌دنبال داشته باشد، اگر یک اتم وارد این کاواک شود می‌تواند با هر دو مد میدان برهم‌کنش کند [۴]. مبنای فیزیکی پژوهش حاضر در همین نکته نهفته است.

در این مجال، مدلی برای برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی با دو میدان کوانتیده‌ی جفت‌شده ارائه می‌شود. فرض می‌شود برهم‌کنش در چنان کاواکی انجام شود که یک محیط غیرخطّی کِر نیز آن را در بر گرفته است. در ادامه، تحت شرایط اولیه‌ای که برای اتم و میدان در نظر گرفته می‌شود، شکل صریح تابع موج سامانه به‌طور دقیق محاسبه می‌گردد. در آخر، چلاندگی آنتروپی موقعیت-تکانه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نشان‌داده شده است که آنتروپی می‌تواند به‌عنوان معیاری برای بررسی چلاندگی افت‌وخیزهای کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد [۵].

۲- فرمول‌بندی نظری

از دیدگاه مکانیک کوانتومی، تابع موج یک سامانه‌ی فیزیکی خاستگاه اطّلاعات ممکن آن سامانه است. یافتن این مهم با در نظر گرفتن همه‌ی برهم‌کنش‌های موجود بین زیرسامانه‌ها، تشکیل هامیلتونی مناسب و در نهایت با بررسی تحوّل زمانی آن میسّر می‌شود. سامانه‌ی فیزیکی حاضر شامل یک اتم سه‌ترازی در پیکربندی نوع Λ است که با دو میدان کوانتومی جفت‌شده با بسامد نوسانات Ω_1 و Ω_2 در یک کاواک اپتیکی شامل محیط کِر برهم‌کنش می‌کند (شکل ۱).



شکل ۱: برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک میدان دومدی در یک کاواک شامل محیط کِر.

در سامانه‌ی اتمی مورد بررسی، ترازهای اتمی با نماد $|j\rangle$ و انرژی ω_j نشان‌داده می‌شوند که در آن گذار $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ گذار ممنوع است. ازاین‌رو، سامانه‌ی حاضر با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_{AF} \qquad (۱)$$

که در آن عبارت‌های مربوط به اتم و میدان به‌صورت

$$\hat{H}_A = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \hat{\sigma}_{jj},$$

$$\hat{H}_F = \sum_{j=1}^{2} \left(\Omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \chi_j \hat{a}_j^{\dagger 2} \hat{a}_j^2 \right) + \chi_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + g_{12} \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \qquad (۲)$$

و سهم برهم‌کنش عبارت است از:

$$\hat{H}_{AF} = \sum_{j=1}^{2} \left[g_1^{(j)} (\hat{a}_j \, \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{a}_j^\dagger) + g_2^{(j)} (\hat{a}_j \, \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{a}_j^\dagger) \right] \qquad (۳)$$

در روابط بالا، عملگر نردبانی اتمی به‌صورت $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ تعریف می‌شود. $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش، $g_1^{(j)}$ و $g_2^{(j)}$ ثابت‌های جفت‌شدگی بین اتم-

[1] Parametric down conversion

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-04]

میدان برای مد j ام هستند و g_{12} به ثابت جفت‌شدگی در برهم‌کنش میدان-میدان اشاره دارد. همچنین، χ_1 ، χ_2 و χ_{12} پذیرفتاری‌های محیط کِر را نشان می‌دهند.

به منظور بررسی دینامیک سامانه‌ی کوانتومی حاضر، از روش دامنه‌ی احتمال استفاده می‌کنیم [۶]. پیش از آن، لازم است که از تبدیلات کانونیک زیر بهره‌مند شویم:

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1 \cos\theta + \hat{b}_2 \sin\theta, \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2 \cos\theta - \hat{b}_1 \sin\theta \qquad (۴)$$

در این رابطه عملگرهای $\hat{b}$ و $\hat{b}^\dagger$ مشابه عملگرهای بوزونی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ رفتار می‌کنند. همچنین، θ پارامتری است که با توجّه به ویژگی‌های هامیلتونی سامانه تعیین خواهد شد. با جانشینی تبدیلات کانونیک (۴) در هامیلتونی سامانه، شکل نهایی آن به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1,\\
&\hat{H}_0 = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \hat{\sigma}_{jj} + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{\Omega}_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j,\\
&\hat{H}_1 = \chi \sum_{j=1}^{2} \hat{b}_j^{\dagger 2} \hat{b}_j^2 + 2\chi \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2\\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} \Big[\mu_1^{(j)} (\hat{b}_j\, \hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21} \hat{b}_j^\dagger)\\
&\quad + \mu_2^{(j)} (\hat{b}_j\, \hat{\sigma}_{13} + \hat{\sigma}_{31} \hat{b}_j^\dagger) \Big]
\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن فرض کرده‌ایم $\chi_1 = \chi_2 = \chi = \frac{\chi_{12}}{2}$. هم‌چنین

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Omega}_1 = \Omega_1 \cos^2\theta + \Omega_2 \sin^2\theta - g_{12} \sin 2\theta,\\
&\mathbf{\Omega}_2 = \Omega_1 \sin^2\theta + \Omega_2 \cos^2\theta + g_{12} \sin 2\theta,\\
&\mu_k^{(1)} = g_k^{(1)} \cos\theta - g_k^{(2)} \sin\theta,\\
&\mu_k^{(2)} = g_k^{(1)} \sin\theta + g_k^{(2)} \cos\theta, \quad k = 1,2,\\
&\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2g_{12}}{\Omega_2 - \Omega_1} \right),\\
&g_{12} = \frac{\delta(\Omega_2 - \Omega_1)}{1-\delta^2}, \qquad \frac{g_1^{(1)}}{g_1^{(2)}} = \delta = \frac{g_2^{(1)}}{g_2^{(2)}}
\end{aligned} \qquad (۶)$$

در ادامه، مناسب است که محاسبات خود را در تصویر برهم‌کنش دنبال کنیم. در نتیجه، هامیلتونی سامانه به‌شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}
V_I(t) = {} & \mu\left(\hat{b}_2 \hat{\sigma}_{12}\, \mathrm{e}^{-i\Delta_2 t} + \gamma\, \hat{b}_2 \hat{\sigma}_{13}\, \mathrm{e}^{-i\Delta_3 t} \right) + \mathrm{h.c.}\\
& + \chi \hat{b}_1^{\dagger 2} \hat{b}_1^2 + \chi \hat{b}_2^{\dagger 2} \hat{b}_2^2 + 2\chi \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2
\end{aligned} \qquad (۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
&\mu = g\sqrt{1+\delta^2}, \gamma = \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu_1^{(2)}},\\
&\Delta_k = \mathbf{\Omega}_2 - (\omega_1 - \omega_k), \qquad k = 2,3
\end{aligned} \qquad (۸)$$

برای سادگی فرض کرده‌ایم $g_1^{(2)} = g$. به منظور مطالعه‌ی دینامیک سامانه، تابع موج سامانه در هر لحظه‌ی دلخواه t به‌شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} q_n q_m \big[& A(n,m,t) |1,n,m\rangle\\
& + B(n,m+1,t) |2,n,m+1\rangle\\
& + C(n,m+1,t) |3,n,m+1\rangle \big]
\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در این رابطه q_n و q_m دامنه‌ی احتمال اولیه میدان‌های کاواک و A ، B و C دامنه‌های احتمال اتمی هستند. با استفاده از روش دامنه‌ی احتمال [۶]، ضرایب A ، B و C به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&A(t) = -\sum_{k=1}^{3} (\vartheta_k + V_2) \mathrm{Y}_k\, \mathrm{e}^{i(\vartheta_k - \Delta_2)t},\\
&B(t) = f_1 \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Y}_k\, \mathrm{e}^{i\vartheta_k t},\\
&C(t) = \frac{1}{f_2} \sum_{k=1}^{3} \Big[(\vartheta_k + V_2)(\vartheta_k + V_1 - \Delta_2) - f_1^2 \Big]\\
&\quad \times \mathrm{Y}_k\, \mathrm{e}^{i(\vartheta_k + \Delta_3 - \Delta_2)t}
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که درآن

$$\begin{aligned}
&\vartheta_k = -\frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}(x_1^2 - 3x_2)^{1/2} \cos\left[\varphi + \frac{2\pi(k-1)}{3} \right],\\
&\varphi = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left[\frac{9x_1x_2 - 2x_1^3 - 27x_3}{2(x_1^2 - 3x_2)^{3/2}} \right], \quad k = 1,2,3
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}
&x_1 = V_1 + 2V_2 + \Delta_3 - 2\Delta_2\\
&x_2 = (V_1 + V_2 - \Delta_2)(V_2 + \Delta_3 - \Delta_2) + V_2(V_1 - \Delta_2) - f_1^2 - f_2^2,\\
&x_3 = V_2 \left[(V_1 - \Delta_2)(V_2 + \Delta_3 - \Delta_2) - f_1^2 - f_2^2 \right] - f_1^2(\Delta_3 - \Delta_2),\\
&V_1 = \chi \left[n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 - 1) + 2n_1 n_2 \right],\\
&V_2 = \chi \left[n_1(n_1 - 1) + n_2(n_2 + 1) + 2n_1(n_2 + 1) \right],\\
&f_1 = \mu\sqrt{n_2 + 1}, \qquad f_2 = \gamma f_1
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

همچنین، با فرض این‌که اتم در حالت برانگیخته باشد، ضرایب Y_k به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند:

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-04]

$$Y_k = \frac{\vartheta_i + \vartheta_j + V_1 + V_2 - \Delta_2}{(\vartheta_k - \vartheta_i)(\vartheta_k - \vartheta_j)}, \quad k \neq i \neq j = 1,2,3 \quad (۱۳)$$

۳- چلاندگی آنتروپی موقعیت-تکانه

با تعیین دقیق ضرایب، شکل صریح تابع موج وابسته به زمان متناظر با سامانه‌ی مورد بحث، به‌دست آمده است. بنابراین می‌توان هر کمّیت فیزیکی مورد علاقه را بررسی، و تجزیه و تحلیل نمود. در این‌جا تنها به مطالعه‌ی چلاندگی آنتروپی موقعیت-تکانه می‌پردازیم.

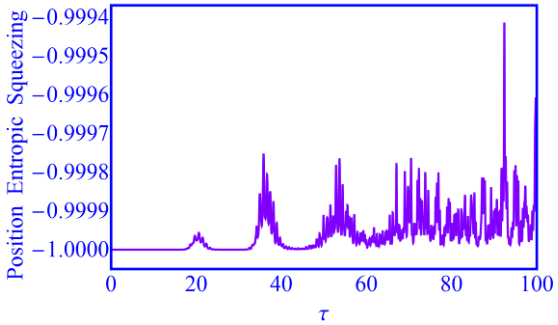
با توجّه به اصل عدم‌قطعیت هایزنبرگ و با درنظرگرفتن ایده‌ی شانون [۷]، شکل دیگری از اصل عدم‌قطعیت برای آنتروپی به‌صورت $\delta x \delta p \geq \pi e$ معرّفی می‌شود که در آن δx و δp، توابع نمایی آنتروپی‌های شانون مربوط به توزیع‌های احتمالاتی x و p هستند که به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta x = \exp\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|\hat{\rho}_F|x\rangle \ln\langle x|\hat{\rho}_F|x\rangle dx\right),$$
$$\delta p = \exp\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} \langle p|\hat{\rho}_F|p\rangle \ln\langle p|\hat{\rho}_F|p\rangle dx\right) \quad (۱۱)$$

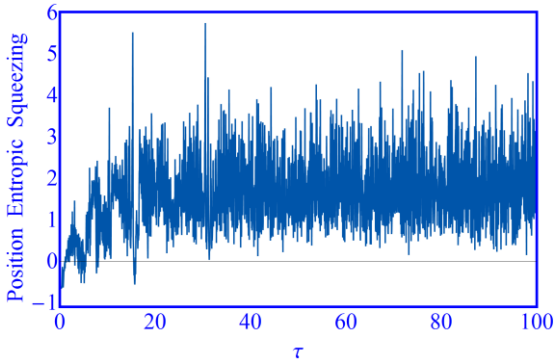
که در آن $\hat{\rho}_F = \mathrm{Tr}_A\left(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\right)$ مشخّص‌کننده‌ی عملگر چگالی کاهش‌یافته‌ی میدان است. با تعریف دو کمّیت به‌صورت

$$E_x = \left(\delta x/\sqrt{\pi e}\right) - 1, \qquad E_p = \left(\delta p/\sqrt{\pi e}\right) - 1 \quad (۱۲)$$

و به پیروی از رهیافت ارائه‌شده در [۸]، شرط چلاندگی آنتروپی موقعیت (تکانه) $-1 < E_x < 0$ $(-1 < E_p < 0)$ خواهد بود.



شکل ۲: چلاندگی آنتروپی برحسب زمان مشخصه‌ی $\tau = gt$ در حالت تشدید به‌ازای $|\alpha|^2 = 10 = |\beta|^2$، $\delta = 0.1$، $\gamma = 1$ و $\chi = 0$.



شکل ۳: چلاندگی آنتروپی برحسب زمان مشخصه‌ی $\tau = gt$ در حالت تشدید به‌ازای $|\alpha|^2 = 10 = |\beta|^2$، $\delta = 0.1$، $\gamma = 1$ و $\chi = 0.4$.

۴- نتیجه‌گیری

نمودارهای ارائه‌شده چلاندگی آنتروپی موقعیت را برای دو وضعیت متفاوت نشان می‌دهند. با توجّه به شکل ۳، روشن است که وجود محیط کِر به‌شدّت این ویژگی غیرکلاسیکی را از بین می‌برد حال آن‌که در نبود آن (شکل ۲)، سامانه‌ی کوانتومی مورد بررسی چلاندگی آنتروپی موقعیت را به‌روشنی در تمام زمان‌ها از خود نشان می‌دهد.

مراجع

[1] Jaynes E.T. and Cummings F.W. **Proc. IEEE.** 51 (1963) 89;
Cummings F.W. **Phy. Rev.** 140 (1965) A1051.
[2] Shore B.W. and Knight P.L. **J. Mod. Opt.** 40 (1993) 1195.
[3] G. Rempe G., Walther H. and Klein N. **Phys. Rev. Lett.** 54 (1985) 551.
[4] Abdalla M.S., Obada A.-S.F. and Abdel-Aty M. **Ann. Phys.** 318 (2005) 266;
Abdel-Aty M., Abdalla M.S. and Sanders B.C. **Phys. Lett. A** 373 (2009) 315.
[5] Orłowski A. **Phys. Rev. A** 56 (1997) 2545.
[6] Scully M.O. and Zubairy M.S. "*Quantum Optics*", Cambridge: Cambridge University Press, (2007);
Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 45 (2012) 035502;
Faghihi M.J. and Tavassoly M.K. **J. Opt. Soc. Am. B** 30 (2013) 2810.
[7] Shannon C.E. and Weaver W. "*The Mathematical Theory of Communication*", University of Illinois Press, Urbana, (1949).
[8] Faghihi M.J., Tavassoly M.K. and Hooshmandasl M.R. **J. Opt. Soc. Am. B** 30 (2013) 1109.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-04]