



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



بررسی فاز هندسی بین دو کیوبیت بر حسب فاصله با استفاده از مدل کالگرو-موزر

امنیت طلب، مهدی؛ رنگانی جهرمی، حسین؛ عباسی، لیلا
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی ۱۶۵، ارومیه

چکیده

در این مقاله تغییرات فاز هندسی برای یک سیستم دو کیوبیتی بر حسب فاصله بین کیوبیت ها، هنگامی که کیوبیت ها تحت تاثیر میدان های مغناطیسی مختلف می باشند، در مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش دژالوشینسکی-موریا (DM) مورد مطالعه قرار می گیرد. نشان داده خواهد شد که وقتی جفت شدگی تبادلی همسانگرد (J) را در دو مدل کالگرو-موزر بررسی کنیم، فاز هندسی برای سیستم مذکور می تواند با افزایش فاصله بین کیوبیت ها افزایش یافته و به یک نقطه ی بیشینه برسد و احتمالا پس از یک افت کوتاه برای فواصل طولانی بدون تغییر بماند. هم چنین نشان داده خواهد شد که افزایش اندازه میدان، باعث کاهش فاز هندسی بر حسب فاصله می شود.
کلید واژه- فاز هندسی، کیوبیت، مدل کالگرو موزر

Studying the geometric phase for a two-qubit model in terms of distance

Amniat-Talab, Mahdi; Rangani Jahromi, Hossein; Abbasi, Leyla

Department of Physics, Faculty of sciences, Urmia University, P. B. 165, Urmia, Iran

Abstract

We study the variation of geometric phase with distance for a two spin-1/2 system with Dzyaloshinskii-Moriya (DM) interaction, while one of the spins is driven by a time-varying rotating magnetic field and the other one is coupled with a static magnetic field. It is shown that when we consider the spin-spin coupling coefficient in the form of the Calogero-Moser types, the geometric phase can increase with the distance and reach a peak; then it maybe decreases for a short distance and will be unchanged for very long distances. Moreover, increasing the amount of magnetic field causes the decrease of geometric phase in terms of the distance.

Keywords: Geometric phase, qubit, the Calogero-Moser model

۱- مقدمه

در سال ۱۹۸۴ فاز هندسی توسط بری^۱ فرمول‌بندی و بسط یافت [۱]. وی ضرائب فازی که در تغییرات بی‌دررو^۲ چرخه‌ای ایجاد می‌شوند را به شکل کامل توضیح داد. این فاز هندسی بی‌دررو چرخه‌ای به فاز بری معروف می‌باشد. با توجه به کاربردهای بسیار فاز هندسی در حوزه‌های مختلف فیزیک از جمله در سیستم‌های مختلف کوانتومی [۲]، سیستم‌های ایتیکی [۳] و... یک نقطه نظر جدید در نظریه مکانیک کوانتومی به وجود آمده است. اخیراً فازهای هندسی برای محاسبات کوانتومی^۳ [۴] پیشنهاد شده است، که یکی از مهم‌ترین کاربردهای آن می‌باشد. همچنین فاز هندسی در تغییرات غیربی‌دررو [۵] و غیر چرخه‌ای [۶] نیز ظاهر شده است. در این مقاله مدل XX هایزنبرگ که حالت خاصی از مدل XXZ می‌باشد همراه با اندرکنش دزایلووینسکی-موریا^۴ (DM) و میدان‌های مغناطیسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این سیستم بعد از بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه بردارهای هامیلتونی سیستم، فازهای بری تولید شده بعد از تغییر بی‌دررو و چرخه‌ای هامیلتونی، محاسبه می‌شود. سپس تغییرات فاز را در دو مدل کالگرو موزر بررسی خواهیم کرد.

۲- مدل و معادلات اساسی

ابتدا سیستمی با دو اسپین $1/2$ (دو کیوبیتی)، که یکی از اسپین‌ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی چرخان در صفحه $X-Y$ و دیگری تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی ثابت با زمان در راستای محور Z ، در نظر می‌گیریم. با انتخاب مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش DM ، هامیلتونی برای چنین سیستمی بصورت زیر نوشته می‌شود [7]:

$$H = J(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) + \bar{B}_1 \cdot \bar{\sigma}_1 + \bar{B}_2 \cdot \bar{\sigma}_2 + \bar{D} \cdot (\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2) \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، J ضریب جفت‌شدگی اسپین-اسپین می‌باشد که این مدل برای $J > 0$ ، آنتی فرومغناطیس و برای $J < 0$ ، فرومغناطیس نامیده می‌شود. $\bar{\sigma}_j = (\sigma_j^x, \sigma_j^y, \sigma_j^z)$ ، $j = (1, 2)$ ماتریس‌های پائولی زیر سیستم‌ها و $\bar{D} \cdot (\bar{\sigma}_1 \times \bar{\sigma}_2)$ جمله اندرکنش DM است که از جفت‌شدگی اسپین-مدار به-

وجود می‌آید. همچنین $\bar{B}_1 = B_1 \hat{z}$ و $\bar{B}_2 = B_2 \hat{n}$ میدان‌های مغناطیسی خارجی با اندازه ثابت هستند که به ترتیب با اسپین ۱ و اسپین ۲ اندرکنش می‌کنند و $\bar{B}_2$ میدان مغناطیسی چرخان در صفحه $X-Y$ می‌باشد با انتخاب $\hat{n} = (\cos \phi(t), \sin \phi(t), 0)$ ، که ϕ آهسته از ۰ تا $\phi(t=T) = 2\pi$ تغییر می‌کند (شرط بی‌دررو و چرخه‌ای)، هامیلتونی توصیف کننده این سیستم به شکل زیر خواهد شد:

$$H = J(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) + B_1 \sigma_1^z + B_2 (\cos \phi \sigma_2^x + \sin \phi \sigma_2^y) + D(\sigma_1^x \sigma_2^y - \sigma_1^y \sigma_2^x) \quad (۱)$$

در رابطه بالا $\bar{D} = D \hat{z}$ انتخاب می‌کنیم. با تعریف پایه‌های استاندارد $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)$ ، شکل ماتریسی هامیلتونی مطابق رابطه زیر می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \exp(-i\phi) & 0 & 0 \\ B_2 \exp(i\phi) & B_1 & 2J + 2iD & 0 \\ 0 & 2J - 2iD & -B_1 & B_2 \exp(-i\phi) \\ 0 & 0 & B_2 \exp(i\phi) & -B_1 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

برای سادگی $B_2 = 1$ و $d = 2(J + iD)$ قرار می‌دهیم، لذا هامیلتونی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} B_1 & \exp(-i\phi) & 0 & 0 \\ \exp(i\phi) & B_1 & d & 0 \\ 0 & \bar{d} & -B_1 & \exp(-i\phi) \\ 0 & 0 & \exp(i\phi) & -B_1 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

ویژه مقادیر این هامیلتونی عبارتند از:

$$E_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2|k|^2 + 2|d|^2 + 4B_1^2 + 4} \quad (۵-الف)$$

$$E_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-2|k|^2 + 2|d|^2 + 4B_1^2 + 4} \quad (۵-ب)$$

که در روابط بالا از متغیرهای مستقل از زمان بصورت زیر استفاده شده است:

$$|k|^2 = \sqrt{16B_1^2 + 4|d|^2 + |d|^4}$$

$$k_{1,2} = 2E_{1,2}(|d|^2 - |k|^2) + 2B_1|k|^2 + 8B_1 - 2B_1|d|^2$$

$$k_{3,4} = 2E_{3,4}(|d|^2 + |k|^2) - 2B_1|k|^2 + 8B_1 - 2B_1|d|^2$$

پس از محاسبات پیچیده، ویژه حالت‌های متناظر با ویژه مقادیر H نیز به صورت ذیل بدست می‌آیند:

$$|\Phi_j(t)\rangle = N_j \begin{bmatrix} F_j \exp(-2i\phi(t)) \\ M_j \exp(-i\phi(t)) \\ G_j \exp(-i\phi(t)) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (۶)$$

که داریم:

$$F_j = \frac{-4d}{k_j} \quad (۷-الف)$$

۱. Berry

۲. Adiabatic evolution

۳. Quantum computation

۴. Adiabatic evolution

۵. Dzyaloshinski-Moriya

با جایگذاری ویژه حالت‌ها، در رابطه (۱۲) داریم:

$$\gamma_j = 2\pi |N_j|^2 (2|F_j|^2 + |M_j|^2 + |G_j|^2) \quad (13)$$

که در رابطه بالا

$$|N_j|^2 = \frac{1}{|F_j|^2 + |M_j|^2 + |G_j|^2 + 1} \quad (14)$$

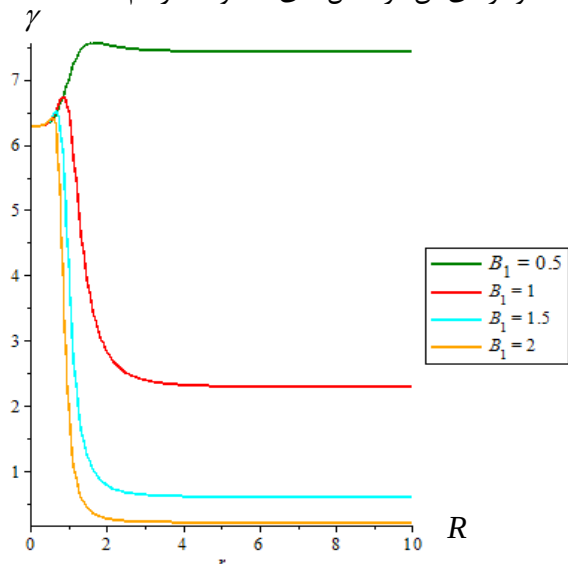
می‌باشد.

۴- مدل کالگرو-موزر^۵ [8]

در یک شبکه اسپینی، مکان واقعی اسپین‌ها به دلیل تولید فونون‌ها به طور نوسانی تغییر می‌کند. در این حالت انتگرال‌های تبدیلی توابعی از مکان بوده و به فاصله بین اسپین‌ها وابسته اند. لذا مطالعه تغییرات فازهندسی با فاصله دارای اهمیت فراوانی است. در این قسمت می‌خواهیم حالات کوانتومی دو کیوبیت که دارای اندرکنش تبدیلی $J(R)$ که وابسته به فاصله بین کیوبیت‌ها می‌باشد را مورد بررسی قرار دهیم. به ویژه هدف مطالعه تاثیر این فاصله روی فازهندسی سیستم می‌باشد. در مدل کالگرو-موزر نوع ۱، $J(R)$ یعنی ضریب اندرکنش تبدیلی بین دو ذره را به صورت ذیل در نظر می‌گیریم:

$$J(R) = \frac{1}{R^2} \quad (15)$$

که نمودارهای آن در شکل‌های (۱) و (۲) رسم شده است.



شکل (۱): تغییرات γ_1 نسبت به R به ازای $D = 0.5$ و $B_2 = 1$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو-موزر نوع ۱

$$M_j = \frac{4d(B_1 - E_j)}{k_j} \quad (7-b)$$

$$G_{1,2} = \frac{-2(|d|^2 + |k|^2 + 4B_1^2 - 4E_{1,2}B_1)}{k_{1,2}} \quad (7-p)$$

$$G_{3,4} = \frac{-2(|d|^2 + |k|^2 + 4B_1^2 - 4E_{3,4}B_1)}{k_{3,4}} \quad (7-t)$$

در رابطه (۶)، N_j ، ضریب بهنجارش برای j امین ویژه مقدار می‌باشد.

۳- فاز بری

همیلتونی سیستمی، با پارامتر وابسته به زمان $R(t)$ که ویژه حالت n ام آن $|n(R(t))\rangle$ می‌باشد، در معادله ویژه مقداری زیر صدق می‌کند:

$$H(R(t))|n(R(t))\rangle = E_n|n(R(t))\rangle \quad (8)$$

معادله شرودینگر وابسته به زمان که کت حالت انرژی، از آن تبعیت می‌کند، مطابق رابطه زیر می‌باشد:

$$H(R(t))|n(R(t))\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|n(R(t))\rangle \quad (9)$$

اگر تغییرات $R(t)$ به حد کافی کند باشد، طبق قضیه بی-دررو انتظار داریم که $|n(R_0), t_0=0; t\rangle$ متناظر با ویژه بردار n ام انرژی، $|n(R(t))\rangle$ از همیلتونی $H(R(t))$ در زمان t باشد. بنابراین داریم:

$$|n(R_0), t_0=0; t\rangle = \exp\left\{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(R(t')) dt'\right\} \quad (10)$$

$$\times \exp(i\gamma_n(t))|n(R(t))\rangle$$

ضریب اول در طرف راست رابطه بالا فاز دینامیکی است، از طرف دیگر با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹)، ضریب فازی دوم که معادل با فاز هندسی بری هست، بدست می‌آید:

$$\gamma_n(t) = i \int_{R_0}^{R(t)} \langle n(R(t')) | \nabla_R n(R(t')) \rangle dR(t') \quad (11)$$

در رابطه بالا مسیر انتگرال مشابه مسیر فرایند بی‌درروی است که پارامتر خارجی R از R_0 تا $R(t)$ تغییر کرده است.

در این مقاله فاز بری وقتی که سیستم تحت تاثیر تغییرات بی‌درروی و چرخه‌ای قرار گرفت، به وجود می‌آید. با فرض آنکه حالت اولیه سیستم $|\Phi_j(t=0)\rangle$ باشد، فاز بری بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma_j = i \int_0^T \left\langle \Phi_j \left| \frac{d}{dt} \Phi_j \right. \right\rangle dt \quad (12)$$

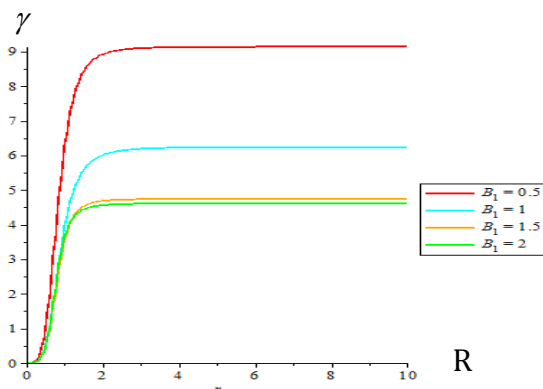
رفتار کلی این نمودارها بدین صورت است که نخست میزان فازهندسی با افزایش فاصله یک سیر صعودی را طی می کند که پس از رسیدن به یک حد بیشینه و احیاناً یک کاهش مختصر، ثابت بودن فازهندسی را در فواصل دور شاهد هستیم. برای مثال در شکل (۱) منحنی سبز نشان دهنده γ_1 است که به ازای $D=0.5$ ، $B_2=1$ و $B_1=0.5$ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می کنیم، منحنی دارای یک افزایش آرام رو به بالاست که این بدین معنی است که با افزایش R میزان فازهندسی افزایش می یابد و دارای یک بیشینه در $R=1.37$ می باشد که در این نقطه اوج فاز هندسی را داریم و سپس به صورت آرام کاهش یافته و در $R \geq 3.085$ به صورت ثابت در می آید. همچنین مشاهده شود که در حالت γ_4 با افت نمودار مواجه نمی شویم و به ازای $R=1.879$ فاز هندسی ثابت می شود. همچنین در هردو مدل با افزایش میدان، مقدار فازهندسی کاهش می یابد.

۵- نتیجه گیری

فاز هندسی سیستم دو کیوبیتی با فاصله بین کیوبیت ها، هنگامی که کیوبیت ها تحت تاثیر میدان مغناطیسی مختلف می باشند، در مدل XX هایزنبرگ همراه با اندرکنش دژایلو شنسکی- موری (DM) مورد مطالعه قرار گرفت. نشان داده شد که تحت دو مدل کالگرو - موزر، فازهندسی با افزایش فاصله یک سیر صعودی را طی می کند که پس از رسیدن به یک حد بیشینه و احیاناً یک کاهش مختصر، ثابت بودن فازهندسی را در فواصل دور شاهد هستیم. هم چنین نشان داده شد که افزایش اندازه میدان، باعث کاهش فازهندسی می شود.

مراجع

- [۱] M.V. Berry, *Pro. R. Soc. London. A*, **392**, 45(1984).
- [۲] A. Shapera, F.Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapore (1989).
- [۳] A. Tomita, R. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **57**(1986).
- [۴] L.M. Duan, J.I. Cirac, and P. Zoller, *Science* **292**, 1695 (2001).
- [۵] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1593 (1987).
- [۶] J. Samuel and B. Bhandari, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2339 (1988).
- [7] M. Amniat-talab, H. Rangani Jahromi, and S. Golkar, *Int. J. Theo. Phys.* **52**, 163 (2013).
- [8] K. Hikami, M. Wadati, *J. Phy. Soc. Jpn.* **62**, (1993).

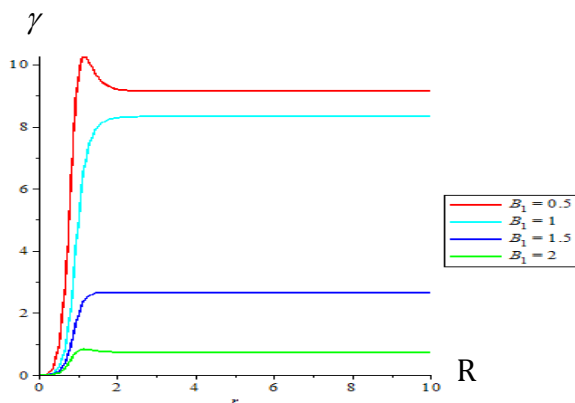


شکل (۲): تغییرات γ_4 نسبت به R به ازای $B_2=1$ ، $D=0.5$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو - موزر نوع ۱.

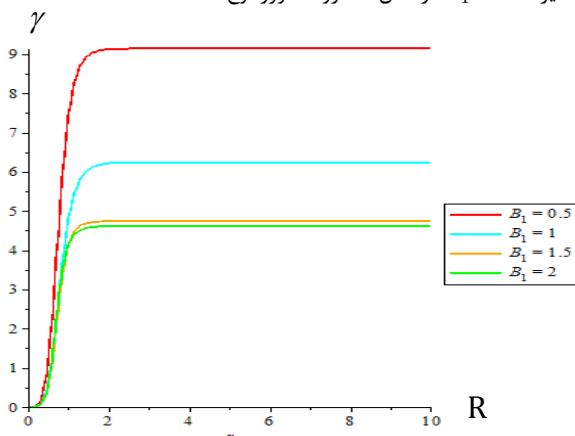
در مدل کالگرو - موزر نوع ۲ نیز $J(R)$ را به صورت ذیل در نظر می گیریم:

$$J(R) = \frac{1}{\sinh^2 R} \quad (۱۶)$$

که در این مدل نیز فقط نمودارهای γ_3 و γ_4 را بررسی می کنیم (به شکل های (۳) و (۴) دقت شود).



شکل (۳): تغییرات γ_3 نسبت به R به ازای $B_2=1$ ، $D=0.5$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو - موزر نوع ۲.



شکل (۴): تغییرات γ_4 نسبت به R به ازای $B_2=1$ ، $D=0.5$ و مقادیر مختلف B_1 در مدل کالگرو - موزر نوع ۲.