بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

بررسی اثرخصوصیات محیط بر درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون در یک نانوکاواک غیرخطی

شهلا علیزاده[۱] ، رزا صفایی[۲] و محمد مهدی گلشن[۱]

[۱]بخش فیزیک دانشگاه شیراز
[۲]دانشکده فناوریهای نوین دانشگاه شیراز

چکیده - در این مقاله درهمتنیدگی گرمایی دو مُد فوتونی در یک نانوکاواک غیرخطی با استفاده از منفیت به عنوان سنجه‌ای از آن، بررسی می‌شود. فرض می‌شود که فوتونها، گرمایی هستند و جفتیدگی در یک ماده دی‌الکتریک مرکز-تقارنی، بواسطه پذیرفتاری مرتبه اول و سوم روی می‌دهد. پس از محاسبه ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های سیستم، ماتریس چگالی گرمایی و در نتیجه ویژه‌مقادیر منفی ماتریس ترانهاده جزئی بدست می‌آید. نتایج محاسبات حاکی از جداپذیربودن دو مُد فوتونی در دمای صفرمطلق است. با افزایش دما، میزان درهمتنیدگی افزایش و پس از رسیدن به یک بیشینهٔ قابل کنترل توسط پارامترهای محیط، بطور مجانبی به سمت صفر میل می-کند.

کلید واژه- اثرات گرمایی، درهم تنیدگی، منفیت، محیط غیر خطی کر.

Effects of medium characteristics on the properties of thermal photon-photon entanglement in a nonlinear nanocavity

Shahla Alizadeh [1], Rosa Safaiee [2], and Mohammad Mehdi Golshan [1]

[1]Physics Department, Shiraz University, Shiraz, Iran
[2]Faculty of Advanced Technologies, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract- In this paper we study the properties of photon-photon thermal entanglement occurring in a nonlinear optical cavity. The photons are thermally produced inside a nonlinear cavity that couples the two modes via first and third order susceptibilities. Diagonalizing the Hamiltonian of the system, the thermal density matrix and, consequently, the partially transposed one are obtained. The negative eigenvalues of the latter are then calculated, leading to the negativity as a measure of photon-photon entanglement. Our results show that the two photons are separable at absolute zero. As the temperature increases, the negativity exhibits a maximum whose value strongly depends on the medium characteristics and then asymptotically vanishes.

Keywords: Thermal Effects, Entanglement, Negativity, Kerr Nonlinear Medium.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

۱-مقدمه

حالت‌های درهمتنیده نقش ویژه‌ای را در زمینه‌های مختلف پردازش اطلاعات کوانتومی مانند انتقال کوانتومی اطلاعات، محاسبات کوانتومی و موارد دیگر [۱-۴] ایفا می‌کنند. تحقیقات در زمینه درهمتنیدگی کوانتومی معمولاً بر روی دو مبحث ایجاد و اندازه گیری آن متمرکز شده است. یک روش برای ایجاد و بررسی درهمتنیدگی، کاواک الکترودینامیک کوانتومی می‌باشد [۵]. در این روش، برهم‌کنش کیوبیت های ماده با مُد اپتیکی کاواک برای درهمتنیدگی‌های اتم-اتم، اتم-فوتون یا فوتون-فوتون استفاده می‌شود [۶،۷]. برهم‌کنش فوتون-فوتون معمولاً در خلأ مورد مطالعه قرار می‌گیرد، اما برای کاربردهایی مانند سوئیچینگ اپتیکی [۸] و مدولاسیون [۹] وجود دی الکتریک داخل کاواک اجتناب ناپذیراست. از طرف دیگر وجود تابش حتی با فوتون‌های محدود نیز باعث تحریک جملات غیرخطی در برهم‌کنش‌ها می‌شود [۱۰]. از طرف دیگر بررسی این برهم‌کنش‌ها، اعم از خطی و غیرخطی، بطور معمول در دمای صفر مطلق (آنسامبل های خالص) انجام می‌گیرد. این در حالیست که سیستم در برهم‌کنش با محیط (به عنوان یک حمام گرمائی) تحت دمای T قرار داشته که این خود می‌تواند باعث درهمتنیدگی یا جداپذیری اعضای سیستم گردد. بنابراین هدف از مقاله حاضر بررسی درهمتنیدگی دو مُد فوتونی در یک کاواک غیرخطی مرکز-تقارنی در دمای T می‌باشد.

جفتیدگی فوتون–فوتون در یک محیط غیرخطی در اثر حضور دو عامل خودکنش-دگرکنش (غیرخطی) و برهم-کنش خطی فوتون-فوتون می‌باشد که می‌توانند درهمتنیدگی فوتون‌ها را تحت تأثیر قرار دهند. بنابراین، برخلاف گزارش‌های قبلی که از عامل غیرخطی دگرکنش صرفنظر می‌شود [۱۱و۱۲]، در مقاله حاضر، بدون درنظر گرفتن هیچگونه محدودیتی بر قدرت این عوامل، به طور ویژه اثر هر دو عامل غیرخطی را بر درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون بررسی می کنیم. بدین منظور با توجه به هامیلتونی دو مُد فوتونی با جفتیدگی‌های مذکور، یک عملگر کازیمیر که ویژه‌مقادیر آن برانگیختگی‌های سیستم را نشان می‌دهد و با کل هامیلتونی جابجا می‌شود، معرفی می‌گردد. با توجه به ویژه‌حالت‌های مشترک هامیلتونی و این عملگر، دیده می‌شود که هامیلتونی قطعه–قطری، هر یک با ابعاد $(n+1)\times(n+1)$، که در آن n معرف برانگیختگی سیستم است، خواهد بود. بدین ترتیب به راحتی می‌توان ویژه‌حالت‌های فوتونی همراه با ویژه‌مقادیر متناظر را محاسبه نمود، با توجه به آنکه فوتون‌های سیستم، گرمائی می‌باشند، هر حالت از آن با توزیع احتمال ماکسول-بولتزمن روی می‌دهد. بنابراین با استفاده از این توزیع احتمال، عملگر (ماتریس) چگالی به عنوان تابعی از دما بدست می‌آید. در ادامه، ماتریس ترانهاده جزئی که خود بالا-مثلثی است، محاسبه و از طریق ویژه-مقادیر منفی آن، سنجه منفیت برای دو مُد فوتونی حاصل خواهد شد. در اینجا خاطر نشان می‌شود که هرچند سنجه منفیت تنها برای سیستمهای 2×2 یا 2×3 شرط لازم وکافی را تشکیل می‌دهد، باور عموم بر آن است که این سنجه در سیستم‌هایی با ابعاد بزرگتر نیز درهمتنیدگی و میزان آن را نشان می‌دهد [۱۳و۱۴و۱۵]. بررسی‌های ما نشان می‌دهد که حالت پایه سیستم غیردرهمتنیده است و بنابراین در دمای صفر مطلق منفیت دارای مقدار صفر می‌باشد و با افزایش دما به یک بیشینه و پس از آن به طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. از نتایج مهم این گزارش آنست که میزان درهمتنیدگی گرمایی نسبت عکس با عوامل غیرخطی دگرکنش و خودکنش دارد.

۲-هامیلتونی سیستم

اگر برهم‌کنش دو مُد فوتونی در نانوکاواکی پرشده از یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی را در نظر بگیریم، هامیلتونی این سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = H_0 + H_{nonl} + H_{\text{int}} \qquad (۱)$$

درمعادله (۱) جمله $H_0 = \hbar\sum_{i=1}^{2}\omega_i(a_i^{\dagger}a_i+\frac{1}{2})$، هامیلتونی مربوط به فوتون هاست که در آن ω_i فرکانس مربوط به هر مُد فوتونی است، همچنین

$$H_{nonl} = \hbar\sum_{i=1}^{2}\chi_i(a_i^{\dagger})^2a_i^2 + \hbar\bar{\chi}a_1^{\dagger}a_1a_2^{\dagger}a_2 \qquad (۲)$$

نشان‌دهنده جفتیدگی غیرخطی و

$$H_{\text{int}} = \hbar\lambda(a_1^{\dagger}a_2 + a_1a_2^{\dagger}) \qquad (۳)$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

نشان‌دهنده جفتیدگی خطی فوتون‌ها می‌باشد. درمعادلات (۲) و (۳)، $(a_i^\dagger)a_i$ عملگر نابودی (خلق) فوتون‌ها، χ_i، $\bar{\chi}$ بترتیب پذیرفتاری مرتبه سوم وابسته به خودکنش و دگرکنش و λ جفتیدگی خطی بین فوتون‌ها را نشان می‌دهند. با توجه به هامیلتونی درمعادله (۱) به راحتی می‌توان نشان داد برای عملگر $N=\sum_{i=1}^{2}a_i^\dagger a_i$ که ویژه مقادیر آن نشان دهنده تمامی برانگیختگی‌های سیستم می‌باشد، $[H,N]=0$. اگر حالت‌ها بر اساس ویژه مقادیر عملگر N شماره گذاری شوند، نمایش ماتریسی معادله (۱) قطعه-قطری، هر یک با ابعاد $(n+1)\times(n+1)$ می‌شود.

در بخش بعد از این هامیلتونی برای بدست آوردن عملگر چگالی گرمایی استفاده می‌شود.

۳- درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون دریک نانوکاواک غیرخطی

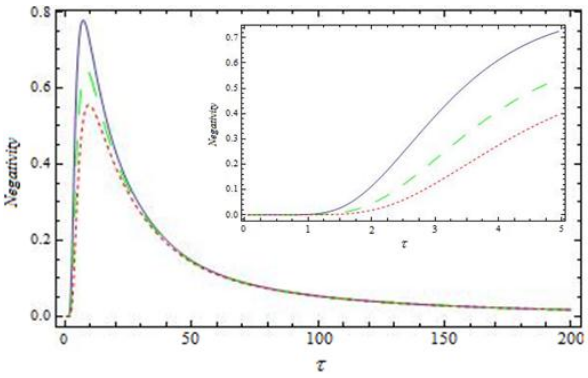
به منظور محاسبه درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون دریک نانوکاواک غیرخطی با استفاده از سنجه منفیت، ابتدا ماتریس چگالی گرمایی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho=\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{n}e^{-\beta E_i}\left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right| \qquad (۵)$$

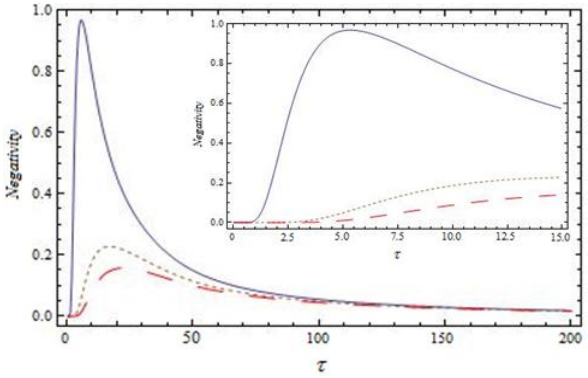
که در آن $\{|\psi_i\rangle\}$ ویژه‌حالت‌ها و $\{E_i\}$ ویژه‌مقادیر هامیلتونی، $Z=\sum_{i=0}^{n}e^{-\beta E_i}$ تابع پارش سیستم و $\beta=1/k_BT$ است (k_B ثابت بولتزمن و T دمای سیستم می‌باشد). سپس با جزئی ترانهاد کردن ماتریس چگالی گرمایی نسبت به یکی از زیر سیستم‌های فوتونی و محاسبه ویژه‌مقادیر آن، منفیت به عنوان سنجه‌ای از درهمتنیدگی،

$$N(T)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Max}\{0,-\lambda_i(T)\} \qquad (۶)$$

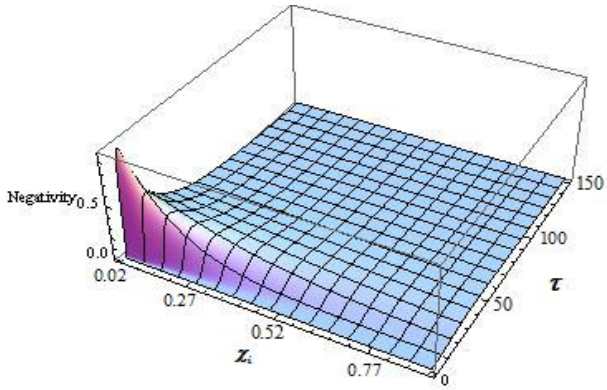
نتیجه خواهد شد. از آنجا که ماتریس ترانهاده جزئی دارای ابعادی نامتناهی می‌باشد، برای محاسبات عددی قطعاتی با ابعاد حداکثر ۵۰×۵۰ در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر در ماتریس چگالی ترانهاده جزئی تا قطعه متناظر با برانگیختگی $n=49$ در نظر گرفته می‌شود. ابعاد فضای هیلبرت در این حالت به $\sum_{n=0}^{n=49}(n+1)=1275$ محدود می‌گردد. این پارامتر قطع، بهنجارش ماتریس چگالی را به ۰/۹۹ تقلیل می‌دهد که باعث ایجاد خطائی معادل با ۰/۰۱ درصد خواهد شد. با این روال، نتایج حاصل از محاسبات عددی در شکلهای ۱-۴ آورده شده است.



شکل۱: درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون به ازای $\lambda=1$ و مقادیر مختلف χ_i، $\chi_i=0.0$ (خط ممتد)، $\chi_i=0.06$ (خط چین) و $\chi_i=0.08$ (نقطه چین). شکل الحاقی رفتار درهمتنیدگی در دمای های کوچک را نشان می‌دهد.

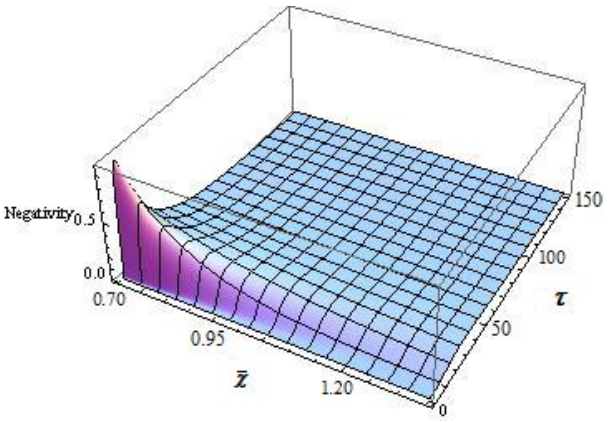


شکل۲: نمودارهمتنیدگی برحسب τ برای سه مقدار مختلف $\bar{\chi}$: $\bar{\chi}=0.7$ (خط ممتد)، $\bar{\chi}=0.9$ (نقطه چین) و $\bar{\chi}=1$ (خط چین). شکل الحاقی رفتار درهمتنیدگی در دمای های کوچک را نشان می‌دهد.



شکل۳: نمودار سه بعدی درهمتنیدگی براساس دما و عامل غیرخطی خودکنش.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]



شکل۴: نمودار سه بعدی درهمتنیدگی براساس دما و عامل غیرخطی دگرکنش.

در این شکلها منفیت برحسب دمای بهنجار شده $\tau = k_B T/\hbar\lambda$ ، برای مقادیر مختلف عوامل غیرخطی خودکنش و دگرکنش رسم شده است. از این شکلها به وضوح دیده می‌شود که حالت پایه سیستم (دمای صفر مطلق) غیردرهمتنیده می‌باشد. هنگامی‌که دما افزایش یابد، تعداد حالت‌های برانگیخته به مراتب بیشتر شده و جداپذیری حالت‌های دو فوتون از دست رفته، بیشینه در درهمتنیدگی مشاهده می‌شود. از آنجائیکه با افزایش بیشتر دما حالت سیستم به سمت یک آنسامبل کاملاً آمیخته (جداپذیر) میل می‌کند، درهمتنیدگی کاهش می‌یابد. اما با توجه به اینکه تعداد حالت‌های فوتونی نامتناهی است دمای محدودی وجود ندارد که بالاتر از آن سیستم فوتون- فوتون جداپذیر شود. در نتیجه، منفیت هیچگاه صفر نخواهد شد و حالت‌های گرمایی فوتون-فوتون در یک نانو کاواک غیرخطی همیشه درهمتنیده هستند. با توجه به جمله H_{nonl} در هامیلتونی بدیهی است که با افزایش عوامل غیرخطی خودکنش و دگرکنش جدایی ترازهای انرژی افزایش می‌یابد. بنابراین، برای دو عامل غیرخطی دگرکنش و خودکنش بزرگتر، انرژی گرمایی بیشتری برای شمول حالت‌های برانگیخته پایین و همچنین رسیدن به بیشترین حد همبستگی حالت های فوتونی نیاز است. به بیان دیگر، ایجاد درهمتنیدگی و بیشینه درهمتنیدگی در دماهای مشخصه بالاتری رخ می‌دهد. علاوه‌براین، بیشینه درهمتنیدگی با افزایش این دو عامل کاهش می‌یابد. این نتایج در شکلهای ۱-۴ تأیید می شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر دما بر درهمتنیدگی فوتون-فوتون در یک نانوکاواک غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفته است. محاسبات ما نشان می‌دهد که حالت پایه سیستم (در دمای صفر مطلق) یک حالت غیردرهمتنیده است. با افزایش دما و ظهور حالت‌های برانگیخته بالاتر درهمتنیدگی افزایش و بعد از گذشتن از یک بیشینه بطور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. از نتایج دیگر این مقاله آن است که مقدار بیشینه درهمتنیدگی و دمای مشخصه آن را می‌توان توسط عوامل غیرخطی خودکنش و دگرکنش کنترل کرد.

مراجع

[1] Olmschenk, S. et al, *Quantum teleportation between distant matter qubit*, Science, Vol. 323, pp. 486-491, 2009.

[2] Raussendorf, R., and Briegel, H. J., *A one-way quantum computer*, Phys. Rev. Lett.,Vol. 86, pp. 5188-5191, 2001.

[3] Takeda, S., Mizuta, T. and Fuwa, M., *Generation and eight-port homodyne characterization of time-bin qubits for continuous-variable quantum information processing*, Phys. Rev. A, Vol. 87, 043803, 2013.

[4] Schaibley, J. R., Burgers, A. P., McCracken, G. A., Duan, L.-M., Berman, P. R., Steel, D. G., Bracker, A. S., Gammon, D., Sham, L. J., ,Phys. Rev. Lett., Vol. 110, 167401, 2013.

[5] Dong, Y. and Kuang, L.M., *Quantum entanglement between a double quantum dot and photons*,Phy. Lett. A, Vol.367, pp. 40-46, 2007.

[6] Foroozani, N., Golshan, M. M., and Mahjoei, M., *Properties of the localized field emitted from degenerate Λ-type atoms in photonic crystals*, Phys. Rev. A, Vol. 76, 015801, 2007.

[7] Ritter, S., Nölleke, C., Hahn, C., Reiserer, A., Neuzner, A., Uphoff, M., Mücke, M., Figueroa, E., Bochmann, J. and Rempe, G., *An elementary quantum network of single atoms in optical cavities*, Nature, Vol. 484, pp. 195-200, 2012.

[8] Plenio, M. B. and Vedral, V., *Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world*, Contemporary Physics, Vol. 39, pp. 431-446, 1998.

[9] Boyd, R. W, *Nonlinear Optics*, Third edition, Academic press 2008.

[10] Demtroder, W., *Leser Spectroscopy*, Third edition, Springer, 2002.

[11] Miranowicz, A., Leoński W., *Dissipation in systems of linear and nonlinear quantum scissors*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt**,** Vol.6, pp. S43-S46, 2004.

[12] Miranowicz, A., Leoński, W., *Two-mode optical state truncation and generation of maximally entangled states in pumped nonlinear couplers*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys**,** Vol.39, pp.1683, 2006

[13] Xiao-San, M., An-Min, W., *Thermal Entanglement of an XY Two-Qutrit Spin Chain with Dzialoshinski–Moriya Interaction*, Commun. Theor. Phys, Vol.52, No.825, 2009.

[14] Solano-Carrillo, E., Franco, R., and Silva-Valencia, J., *Entanglement and quantum phase transition in a mixed-spin Heisenberg chain with single-ion anisotropy*, Physica A, Vol. 390, pp. 2208–2214, 2011.

[15] Foroozani, N. and Golshan, M.M., *Entanglement of Λ-atom and thermal photons in a double-band photonic crystal*, J. Stat. Mech., P02007, 2010.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]