بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

# درهم‌تنیدگی و وارونی جمعیت اتمی در برهم‌کنش بین دو اتم سه‌ترازی با دو میدان جفت‌شده

الهام فرجی[۱]، محمد کاظم توسلی[۱و۲] و حمید رضا باغشاهی[۱و۲و۳]
[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی و رمزنگاری، دانشگاه یزد، یزد
[۳]گروه فیزیک، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

**چکیده – در این مقاله، برهم‌کنش بین دو اتم یکسان سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با یک جفت میدان همدوس را در حضور ترم‌های مبدل (جفت‌شدگی میدان‌ها) مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در واقع در این برهم‌کنش علاوه بر برهم‌کنش اتم‌ها و میدان، بین خود میدان‌ها نیز یک جفت‌شدگی وجود دارد. با استفاده از تبدیلات کانونی مناسب، هامیلتونی سامانه، به هامیلتونی تعمیم‌یافتهٔ مدل جینز-کامینگز برای برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی با یک میدان جفت‌شده کاهش می‌یابد. پس از یافتن شکل صریح تابع موج سامانهٔ اتم-میدان با استفاده از تبدیلات لاپلاس، به‌منظور بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت به‌دست‌آمده، آنتروپی خطی و وارونی جمعیت اتمی را با محاسبات عددی مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.**

کلید واژه- درهم‌تنیدگی، وارونی جمعیت، میدان‌های جفت‌شده، ویژگی‌های غیرکلاسیکی.

# Entanglement and Atomic Population Inversion of Two Three-level Atoms Interacting with Two Coupled Fields

Elham faraji[1], Mohamad Kazem Tavassoly[1,2] and Hamid Reza Baghshahi[1,2,3]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[2]The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd
[3]Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract- In this paper, we study the interaction of two identical $\Lambda$-type three-level atoms with a pair of coherent field in the presence of converter terms (coupled fields). Indeed, in addition to the interaction between the atoms and fields, the fields are interacting with each other, too. By applying the appropriate canonical transformations, the introduced model is reduced to a well-known form of the generalized Jaynes-Cummings model for the interaction between two three-level atoms and two coupled modes. After obtaining the explicit form of the atom-field wave function by using the Laplace transform technique, in order to examine the nonclassical properties of the obtained state, we evaluate the linear entropy and atomic population inversion, numerically.

Keywords: Entanglement, Population inversion, Coupled fields, Nonclassical properties.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-08-19 ]



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

## ۱- مقدمه

برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتیدهٔ تک‌مد، یکی از اساسی‌ترین مسائل در حوزهٔ اپتیک کوانتومی است. ساده‌ترین مدل برای بررسی این برهم‌کنش، مدل جینز-کامینگز است [۱]. با توجه به اهمیت این موضوع، تعمیم‌های فراوانی از این مدل پیشنهاد شده است که انگیزه‌های بسیاری را برای پژوهش‌های نظری و تجربی فراهم می‌کند. در مقالهٔ حاضر نیز با تعمیم این مدل، برهم‌کنش دو اتم یکسان سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با یک میدان دومدی جفت‌شدهٔ همدوس را معرفی می‌کنیم. با به‌دست آوردن تابع موج کل سامانه، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه مانند درهم‌تنیدگی و وارونی جمعیت را با در نظرگرفتن شرایط اولیهٔ متفاوت برای اتم‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲- حل تحلیلی تابع موج سامانهٔ اتم-میدان

هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با میدان کوانتیدهٔ دومدی جفت‌شده را بر اساس مدل تعمیم‌یافتهٔ جینز-کامینگز به‌صورت $\hat{H}_{\rm in}=\hat{H}_0+\hat{H}_1$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که [۲]:

$$\hat{H}_0=\sum_{k=1}^{2}\Omega_k\,\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\sum_{j=A_1,A_2}\Big(\omega_1\left|1^j\right\rangle\left\langle 1^j\right| +\omega_2\left|2^j\right\rangle\left\langle 2^j\right|+\omega_3\left|3^j\right\rangle\left\langle 3^j\right|\Big) \tag{۱}$$

$$\hat{H}_1=\sum_{j=A_1,A_2} i\lambda_1\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\,\hat{\sigma}_{12}^j-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\,\hat{\sigma}_{21}^j\right) +i\lambda_1\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\,\hat{\sigma}_{13}^j-\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\,\hat{\sigma}_{31}^j\right)+\lambda_2\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\right) \tag{۲}$$

که در آن $|1\rangle$، $|2\rangle$ و $|3\rangle$ ترازهای اتمی با بسامدهای $\omega_3<\omega_2<\omega_1$، $j$ اندیس شمارندهٔ اتم‌ها، $\hat{\sigma}_{ll'}=|l\rangle\langle l'|$ عملگرهای بالابرنده و پایین‌برندهٔ اتمی، $\Omega_k\,(k=1,2)$ بسامدهای دو مد میدان، $\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger$ عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش مربوط به مد $k$ام، $\lambda_1$ ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان (که بدون کاستن از عمومیت مسئله برای هر دو اتم یکسان در نظر گرفته شده است) و بالاخره $\lambda_2$ ثابت جفت‌شدگی بین مدهای میدان درنظر گرفته شده است. وجود قسمت آخر در هامیلتونی منجر به پیچیدگی‌هایی در فرایند حل مسئله می‌شود، از این‌رو ابتدا تبدیلات کانونیک زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{a}_1=\hat{b}_1\cos\zeta+\hat{b}_2\sin\zeta,\quad \hat{a}_2=\hat{b}_2\cos\zeta-\hat{b}_1\sin\zeta, \tag{۳}$$

در این رابطه، عملگرهای $\hat{b}_i(\hat{b}_i^\dagger), i=1,2.$ مشابه عملگرهای $\hat{a}_i(\hat{a}_i^\dagger), i=1,2.$ رفتار می‌کنند و زاویهٔ چرخشی $\zeta$ با توجه به ویژگی‌های هامیلتونی سامانه محاسبه می‌شود. تحت تبدیلات (۳)، شکل نهایی هامیلتونی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H}_0=\sum_{k=1}^{2}\bar{\Omega}_k\,\hat{b}_k^\dagger\hat{b}_k+\sum_{j=A_1,A_2}\Big(\omega_1\left|1^j\right\rangle\left\langle 1^j\right| +\omega_2\left|2^j\right\rangle\left\langle 2^j\right|+\omega_3\left|3^j\right\rangle\left\langle 3^j\right|\Big), \tag{۴}$$

$$\hat{H}_1=\sum_{j=A_1,A_2} i\lambda_1\left(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2\,\hat{\sigma}_{12}^j-\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_1\,\hat{\sigma}_{21}^j\right) +i\lambda_1\left(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_2\,\hat{\sigma}_{13}^j-\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_1\,\hat{\sigma}_{31}^j\right) \tag{۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_1&=\Omega_1\cos^2\zeta+\Omega_2\sin^2\zeta-\lambda_2\sin 2\zeta,\\ \bar{\Omega}_2&=\Omega_2\cos^2\zeta+\Omega_1\sin^2\zeta+\lambda_2\sin 2\zeta,\\ \zeta&=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda_2}{\Omega_2-\Omega_1}\right)\end{aligned} \tag{۶}$$

حالت اولیهٔ میدان را به‌صورت یک میدان دومدی جفت‌شدهٔ همدوس در نظر می‌گیریم [۳]:

$$|\xi,q\rangle=N^2\sum_{n=0}^{q}Q_n\,|q-n,n\rangle, \tag{۷}$$

که در آن $N$ (ضریب بهنجارش) و $Q_n$ به‌صورت‌های زیر داده می‌شوند:

$$N^{-2}=\sum_{n=0}^{q}|Q_n|^2,\qquad Q_n=\xi^n\sqrt{\frac{(q-n)!}{q!n!}} \tag{۸}$$

حالت اولیهٔ اتم‌ها را نیز به‌صورت برهم‌نهی عامی از پایه‌های متشکل از ترازهای دو اتم در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که برای تابع موج سامانهٔ کلی اتم-میدان در $t=0$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned}|\psi(t=0)\rangle=\sum_{n=0}^{q}\Big(&\gamma_1|1,1\rangle+\gamma_2\left(|1,2\rangle+|2,1\rangle\right)\\ &+\gamma_3\left(|1,3\rangle+|3,1\rangle\right)+\gamma_4\left(|2,3\rangle+|3,2\rangle\right)\\ &+\gamma_5|2,2\rangle+\gamma_6|3,3\rangle\Big)\otimes|q-n,n\rangle\end{aligned} \tag{۹}$$

حال با در نظرگرفتن تابع موج کل سامانه در زمان $t$ به‌صورت زیر



[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-08-19 ]

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{q} \Big( & C_1(q-n,n,t)|1,1,q-n,n\rangle \\
& + C_2(q-n,n,t)\big(|1,2,q-n,n\rangle + |2,1,q-n,n\rangle\big) \\
& + C_3(q-n,n,t)\big(|1,3,q-n,n\rangle + |3,1,q-n,n\rangle\big) \\
& + C_4(q-n,n,t)\big(|2,3,q-n,n\rangle + |3,2,q-n,n\rangle\big) \\
& + C_5(q-n,n,t)|2,2,q-n,n\rangle \\
& + C_6(q-n,n,t)|3,3,q-n,n\rangle\Big)
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

و حل معادلهٔ وابسته به زمان شرودینگر مربوطه $i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_1|\psi(t)\rangle$ و با استفاده از تکنیک تبدیلات لاپلاس، بعد از انجام محاسباتی طولانی، دامنه‌های احتمال تابع موج (۱۰) به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [۴]:

$$
\begin{aligned}
C_1(q-n+2,n-2,t) = \frac{1}{W_n^3}\Big[ & (\gamma_2+\gamma_3) \\
& \times U_n(U_n^2+V_n^2)Q_{n-1}\sin(2W_n t) \\
& + W_n\big((2\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6)Q_n U_n V_n \sin^2(W_n t) \\
& + \gamma_1 Q_{n-2}(U_n^2 \cos(2W_n t) + V_n^2)\big)\Big],
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2(q-n+1,n-1,t) = \frac{1}{4W_n}\Big[ & \sin(2W_n t)(-2\gamma_1 Q_{n-2}U_n \\
& + Q_n(2\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6)V_n) \\
& + 2Q_{n-1}W_n\big((\gamma_2-\gamma_3)\cos(\sqrt{2}V_n t) \\
& (\gamma_2+\gamma_3)\cos(2W_n t)\big) \\
& + \sqrt{2}Q_n(\gamma_5-\gamma_6)W_n \sin(\sqrt{2}V_n t)\Big],
\end{aligned} \tag{۱۲}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3(q-n+1,n-1,t) = \frac{1}{4W_n}\Big[ & \sin(2W_n t)(-2\gamma_1 Q_{n-2}U_n \\
& + Q_n(2\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6)V_n) \\
& + 2Q_{n-1}W_n\big((\gamma_3-\gamma_2)\cos(\sqrt{2}V_n t) \\
& (\gamma_2+\gamma_3)\cos(2W_n t)\big) \\
& + \sqrt{2}Q_n(\gamma_6-\gamma_5)W_n \sin(\sqrt{2}V_n t)\Big],
\end{aligned} \tag{۱۳}
$$

$$
\begin{aligned}
C_4(q-n,n,t) = \frac{1}{8W_n^3}e^{-2iW_n t}\Big[ & 2iQ_{n-1}(\gamma_2+\gamma_3) \\
& \times (e^{4iW_n t}-1)V_n W_n^2 \\
& + 4W_n e^{2iW_n t}\big[2Q_{n-2}\gamma_1 U_n V_n \sin^2(W_n t) \\
& + Q_n\big(-(\gamma_5+\gamma_6)V_n^2 \sin^2(W_n t) \\
& + 2\gamma_4(U_n^2+V_n^2\cos^2(W_n t))\big)\big]\Big],
\end{aligned} \tag{۱۴}
$$

$$
\begin{aligned}
C_5(q-n,n,t) = \frac{1}{2W_n^3}\Big[ & Q_{n-1}\big(-(\gamma_2+\gamma_3)V_n \\
& \times W_n^2 \sin(2W_n t) \\
& + \sqrt{2}(-\gamma_2+\gamma_3)W_n^3 \sin(\sqrt{2}V_n t)\big) \\
& + W_n\big[2Q_{n-2}\gamma_1 U_n V_n \sin^2(W_n t) \\
& + Q_n\big(-2\gamma_4 V_n^2 \sin^2(W_n t) \\
& + (\gamma_5+\gamma_6)\big(U_n^2+V_n^2\cos^2(W_n t)\big) \\
& + (\gamma_5-\gamma_6)W_n^2\cos(\sqrt{2}V_n t)\big)\big]\Big],
\end{aligned} \tag{۱۵}
$$

$$
\begin{aligned}
C_6(q-n,n,t) = \frac{1}{2W_n^3}\Big[ & Q_{n-1}\big(-(\gamma_2+\gamma_3)V_n \\
& \times W_n^2 \sin(2W_n t) \\
& + \sqrt{2}(\gamma_3+\gamma_2)W_n^3 \sin(\sqrt{2}V_n t)\big) \\
& + W_n\big[2Q_{n-2}\gamma_1 U_n V_n \sin^2(W_n t) \\
& + Q_n\big(-2\gamma_4 V_n^2 \sin^2(W_n t) \\
& + (\gamma_5+\gamma_6)\big(U_n^2+V_n^2\cos^2(W_n t)\big) \\
& + (\gamma_6-\gamma_5)W_n^2\cos(\sqrt{2}V_n t)\big)\big]\Big],
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

که در آن‌ها قرار داده‌ایم:

$$
V_n = \lambda_1\sqrt{n(q-n+1)}\ , \quad U_n = \lambda_1\sqrt{(n-1)(q-n+2)}\ , \quad W_n = \sqrt{V_n^2+U_n^2} \tag{۱۷}
$$

با مشخص شدن ضرایب بسط بالا (۱۶)-(۱۱)، تابع موج کل سامانه (۱۰) به‌دست می‌آید و با داشتن آن می‌توانیم ویژگی‌های فیزیکی سامانه را مورد ارزیابی قرار دهیم.

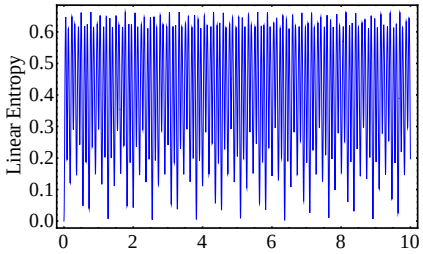
## ۲-۱- آنتروپی خطی

برای محاسبهٔ در هم‌تنیدگی از آنتروپی خطی بهره می‌گیریم. افزایش (کاهش) آنتروپی خطی متناظر با افزایش (کاهش) درهم‌تنیدگی اتم-میدان است. با توجه به تابع موج (۱۰) آنتروپی خطی را می‌توان به‌صورت $S_{A_1A_2} = 1 - Tr\left(\hat{\rho}^2_{A_1A_2}(t)\right)$ (بیانگر درهم‌تنیدگی مجموعهٔ دو اتم با میدان) تعریف کرد که در آن $\hat{\rho}_{A_1A_2} = Tr_F\left(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\right)$ بیانگر ماتریس چگالی کاهش‌یافتهٔ مربوط به دو اتم است [۵]. شکل‌های (۱) و (۲) درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را برای موردی که به‌ترتیب اتم‌ها در $t=0$ هر دو برانگیخته و یا برهم‌نهی از تمام پایه‌های اتمی باشد، نشان می‌دهد. با توجه به این دو نمودار مشخص است که در هر دو مورد، آنتروپی بین مقادیر بیشینه و کمینه‌اش نوسان می‌کند. هم‌چنین بیشینهٔ درهم‌تنیدگی

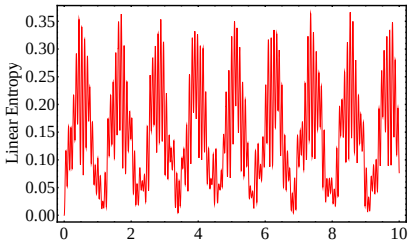


[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-08-19 ]

برای حالتی‌که دو اتم ابتدا در حالت برانگیخته باشند نسبت به حالت دیگر بیشتر است.




شکل ۱: آنتروپی برحسب زمان مشخصهٔ $\tau=\lambda_1 t$ به ازای $p=100,\ \zeta=3\ ,\gamma_1=1,\ \gamma_i(i=2,...,6)=0$.



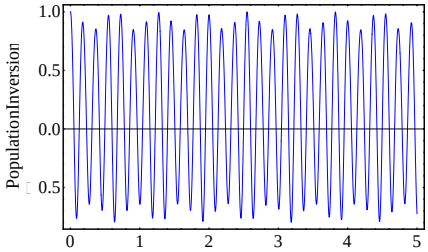

شکل ۲: آنتروپی برحسب زمان مشخصهٔ $\tau=\lambda_1 t$ به ازای $p=100,\ \zeta=3\ ,\gamma_1=\gamma_2=...=\gamma_6=1/3$.

## ۲-۲- وارونی جمعیت اتمی

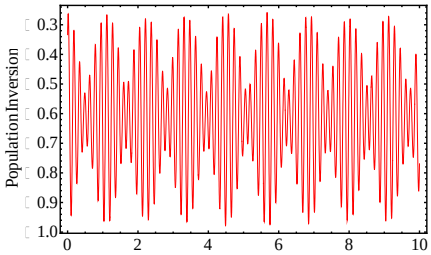
وارونی جمعیت اتمی اتم اول در برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع $\Lambda$ با میدان به‌صورت تفاضل احتمالاتی که اتم در حالت برانگیخته و دو حالت پایه‌اش قرار دارد تعریف می‌شود [۲و۴]. با توجه به نمودار سمت چپ شکل (۳) پیداست که وارونی جمعیت بین مقادیر مثبت و منفی نوسان می‌کند. ولی با توجه به نمودار سمت راست شکل (۳) می‌بینیم که وارونی جمعیت همواره منفی است. هم‌چنین پدیده‌های کوانتومی محض فروافت و بازیافت مناسبی در این شکل مشاهده می‌شود.

$$W(t)=\sum_{n=0}^{q}\Big(\big|C_1(q-n+2,n-2,t)\big|^2 -\big(2\big|C_4(q-n,n,t)\big|^2 +\big|C_5(q-n,n,t)\big|^2+\big|C_6(q-n,n,t)\big|^2\big)\Big) \qquad (۱۷)$$

شکل‌های (۳) و (۴) وارونی جمعیت اتمی را به ازای حالتی‌که به‌ترتیب دو اتم در حالت برانگیخته و یا دو اتم در برهم‌نهی‌ای از تمام حالت‌های ممکن به کاواک وارد شوند را نشان می‌دهد. از شکل (۳) پیداست که وارونی جمعیت بین مقادیر مثبت و منفی نوسان می‌کند. ولی با توجه به شکل (۴) می‌بینیم که وارونی جمعیت همواره منفی است. هم‌چنین پدیده‌های کوانتومی محض فروافت و بازیافت مناسبی در شکل (۴) مشاهده می‌شود.




شکل ۳: وارونی جمعیت برحسب زمان مشخصهٔ $\tau=\lambda_1 t$ به ازای $p=100,\ \zeta=3\ ,\gamma_1=1,\ \gamma_i(i=2,...,6)=0$.




شکل ۴: وارونی جمعیت برحسب زمان مشخصهٔ $\tau=\lambda_1 t$ به ازای $p=100,\ \zeta=3\ ,\gamma_1=\gamma_2=...=\gamma_6=1/3$.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله برهم‌کنش بین دو اتم سه‌ترازی و یک میدان جفت‌شدهٔ همدوس را در حضور برهم‌کنش دو میدان مورد بررسی قرار دادیم. با استفاده از تبدیلات کانونی مناسب و سپس استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس شکل صریح تابع موج سامانهٔ اتم-میدان را به‌دست آوریم. با داشتن این تابع موج، درهم‌تنیدگی بین "دو اتم" و میدان و وارونی جمعیت اتمی را با در نظرگرفتن دو شرط اولیهٔ متفاوت برای اتم‌ها مورد بررسی قرار دادیم. نتایج نشان‌دهندهٔ آن است که رفتار این دو ویژگی به شرط اولیهٔ اتم‌ها وابسته است. رهیافت به کار رفته طوری است که می‌توان تأثیر شرایط اولیه اتمی دیگر بر روی این دو پارامتر را بررسی و هم‌چنین پارامترهای دیگری از قبیل تابع توزیع ویگنر، پارامتر مندل و ... را نیز مورد بررسی قرار داد که در این مختصر نمی‌گنجد.

## منابع

[1] Scully M.O. and Zubairy M.S., *Quantum Optics*, 3th edition, Cambridge Uni. Press, 2001.
[2] Khalil E.K., **Optik** 124 (2013) 1820-1826.
[3] Obada A.–S.F. and Khalil E.M., **Opt. Commun.** 260 (2006) 19-24.
[4] Baghshahi H.R. and Tavassoly M.K., **Phys. Scr.** 89 (2014) 075101.
[5] Agarwal G.S. and Biswas A., **J. Opt. B: Quantum Semiclassical** 7 (2005) 350.



[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-08-19 ]