بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

تولید و اندازه‌گیری همزمان بار توپولوژیکی مدهای لاگر-گاوسی چندگانه با استفاده از توری‌های خطی چنگالی شکل و انحراف‌سنجی مارهای

محمد یگانه[۱]، سیف‌اله رسولی[۲و۱]، مصطفی آخته[۱] و داریوش عبداله‌پور[۱]

[۱] دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان، زنجان

[۲] مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان، زنجان

چکیده – در این کار، نحوهٔ تولید جبههٔ موج چرخشی ساده و یا ترکیبی از یک جبههٔ موج تخت گسیلی از لیزر *He-Ne* با استفاده از یک تلفیق‌گر فضایی ارائه می‌شود. سپس با استفاده از روش انحراف‌سنجی مارهای، شیب نقاط مختلف جبههٔ موج تعیین می‌گردد. با استفاده از مقادیر بدست آمده برای شیب جبههٔ موج و محاسبهٔ انتگرال خطی شیب‌های تعیین شده روی مسیرهای بستهٔ مختلف، بار توپولوژیکی جبههٔ موج چرخشی محاسبه می‌گردد. نشان داده می‌شود بار توپولوژیکی در مسیرهای بسته‌ای که شامل مراکز چند باریکهٔ لاگر-گوسی می‌گردد، از جمع عددی مقادیر بار توپولوژیکی این موج‌ها به‌دست می‌آید. شبیه‌سازی عددی برای نمایش توزیع شدت و فاز این پرتوها نیز انجام پذیرفت. مقایسهٔ مقادیر به‌دست آمده برای این کمیت در موج‌های چندگانه و مقایسهٔ آن با مقادیر مورد انتظار از شکل توزیع فازهای به‌دست آمده نشان می‌دهد روش انحراف‌سنجی مارهای می‌تواند مقدار بار توپولوژیکی را با دقت نسبتاً خوبی تعیین نماید.

کلید واژه- انحراف‌سنجی مارهای، موج لاگر-گوسی چندگانه، پرتو چرخان، تلفیق‌گر فضایی نوری.

Generation and Measurement of Topological Charge of Composite Laguerre-Gaussian Beams using Moiré Deflectometry

Mohammad Yeganeh[1], Saifollah Rasouli[1, 2], Mostafa Aakhte[1] and Daryoush Abdollahpour[1]

[1] Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran,
[2] Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran.

Abstract- In this paper, we have used a LCD as spatial light modulator to generate simple or composite Laguerre-Gaussian beams from a plane wave of a He-Ne laser beam. Moiré Deflectometry is used to measure gradients of wave-front of the vortex beam. Integral along a given closed path of gradients used to measure topological charge of the beam. We show that the sum of topological charges of all beams results overall topological charge of the composite beam. Also, the intensity and phase distribution of such beams were simulated. Comparing results of the numerical simulation and experimental results demonstrate that moiré deflectometry can be used to determine topological charge of a beam with an adequate accuracy.

Keywords: moiré deflectometry, composite Laguerre-Gaussian beam, vortex beam, SLM.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

۱- مقدمه

کمیت اندازه‌حرکت زاویه‌ای که به فوتون‌های یک باریکهٔ نوری نسبت داده می‌شود، می‌تواند ناشی از اسپین و یا اندازه‌حرکت زاویه‌ای چرخشی (OAM) آن باشد. قطبش دایروی موجب حمل اندازه‌حرکتی به میزان $\pm\hbar$ برای هر یک از فوتون‌های باریکهٔ نوری می‌شود، در حالی‌که فوتون‌های یک موج چرخشی با بار توپولوژیکی l می‌توانند هر یک به میزان $l\hbar$ اندازه‌حرکت زاویه‌ای داشته باشند. پرتوهای لاگر-گوسی از جمله مواردی‌اند که دارای این خاصیت می‌باشند. بخش فازی در معادلهٔ این امواج، دارای یک جملهٔ وابسته به زاویهٔ سمتی φ به‌صورت $l\varphi$ است که باعث می‌شود سطح جبههٔ موج شکل مارپیچی به خود بگیرد[۱].

روش‌های مختلفی برای تولید جبههٔ موج چرخشی به‌کار رفته است. اولین بار Allen و همکارانش در سال ۱۹۹۲ نشان دادند که با استفاده از عدسی‌های آستیگماتیسم که مدهای مختلف هرمیت-گوسی را با یکدیگر ترکیب می‌کنند می‌توان مدهای مختلف لاگر-گوسی را ساخت[۲]. علاوه بر روش فوق، ابزار دیگری نیز برای تولید این پرتوها بکار می‌رود که می‌توان به توری پراش[۳]، صفحهٔ فازی (phase plate)[۴]، q-plate [۵] و تلفیق‌گر فضایی نوری (SLM) اشاره کرد. ما در این کار از یک صفحهٔ LCD به‌عنوان SLM به‌منظور تولید پرتوهای لاگر-گوسی چندگانه بهره بردیم[۶].

۲- تئوری

تکنیک ماره روشی متداول برای اندازه‌گیری انحراف‌های نوری است، هنگامی‌که نور از میان محیطهای فازی عبور می‌کند[۷]. حسگر موج ماره‌ای پیش از این برای مطالعهٔ پارامترهای تلاطم جوی و اندازه‌گیری ابیراهی‌های جبههٔ موج مورد استفاده قرارگرفته است[۹و۸]. در این حسگر، باریکهٔ پهن و موازی شدهٔ نور لیزر پس از عبور از محیط فازی، از یک باریکه‌شکن عبور می‌کند، سپس هریک از باریکه‌ها از میان یک انحراف‌سنج ماره‌ای مجزا می‌گذرند. هر انحراف‌سنج ماره‌ای شامل دو توری رانکی مشابه است که در فاصلهٔ معینی از هم قرار دارند. امتداد خطوط توری‌های هریک از این انحراف‌سنج‌ها با یکدیگر زاویهٔ کوچکی می‌سازند، درحالی‌که امتداد خطوط توری‌های این دو انحراف‌سنج عمود بر یکدیگر هستند. با استفاده از آرایه‌ای از عدسی‌ها و آینه‌ها، نقش مارهٔ هر دو انحراف‌سنج را روی صفحهٔ حساس یک دوربین CCD واحد تصویر می‌کنیم. با مقایسهٔ وضعیت خطوط ماره، برای موج تخت و لاگر-گوسی، میزان جابجایی خطوط ماره در نقاط مختلف، میزان شیب جبههٔ موج در دو راستای x, y از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\left[\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x},\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right]=\frac{kd}{z_n}\left[\frac{\delta y_m(x,y)}{d'_m},\frac{\delta x_m(x,y)}{d_m}\right], \quad (۱)$$

k عدد موج، z_n فاصلهٔ دو توری از هم در n امین فاصلهٔ تالبوت است. d_m و d'_m به‌ترتیب گام الگوی ماره در دو راستای x, y روی سطح جبههٔ موج است. δx_m و δy_m نیزجابجایی الگوی ماره در دو راستاست.

شیب جبههٔ موج برای موج لاگر-گوسی که در راستای z منتشر می‌شود و دارای شعاع انحنای $R(z)$ است، در فواصل دور از مبدأ به‌صورت $\overrightarrow{\nabla\phi}\approx\frac{kr}{R(z)}\hat{r}_0+\frac{l}{r}\hat{\varphi}_0+k\,\hat{z}_0$ است که $\hat{\varphi}_0$ و $\hat{z}_0$ به‌ترتیب بردارهای یکه در راستای افزایش زاویهٔ سمتی و راستای مثبت محور z هاست. r فاصلهٔ هر نقطه از سطح جبههٔ موج نسبت به محور آن که منطبق بر محور z ها فرض شده است، می‌باشد. مؤلفه‌های عرضی شیب جبههٔ موج در نقطه‌ای به فاصلهٔ r از محور z به‌صورت زیر است

$$\left[\overrightarrow{\nabla\phi}_r,\overrightarrow{\nabla\phi}_\varphi\right]=\left[\frac{kr}{R(z)},\frac{l}{r}\right]. \quad (۲)$$

چنانچه از این رابطه مشخص است، مقدار بار توپولوژیکی پرتو به مؤلفهٔ سمتی این رابطه بستگی دارد. بار توپولوژیکی این موج را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد

$$l=\frac{1}{2\pi}\oint\overrightarrow{\nabla\phi}.d\vec{S}, \quad (۳)$$

انتگرال باید در مسیر بسته‌ای که شامل ناحیهٔ تاریک مرکز پرتو است گرفته شود و $\overrightarrow{dS}$ المان طولی مسیر انتگرال‌گیری است[۱۰].

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

۳- کارهای تجربی

در این کار، به‌منظور تولید پرتو لاگر-گوسی از یک صفحهٔ LCD به ابعاد $15\times11mm$ با تعداد آرایه‌های 1024×768 استفاده شد. پرتو نور لیزر هلیوم-نئون پس از پالایش فضایی و پهن‌شدن، وارد این قطعه می‌شود. به‌خاطر ساختار تناوبی تلفیق‌گر بلورمایع به‌کار رفته، پرتو ورودی به آن در دو جهت پراش می‌یابد. ما از مرتبهٔ غیرصفر پراش از هر دو بعد (مرتبهٔ ۱و۱) استفاده نمودیم.

به‌منظور اندازه‌گیری شیب جبههٔ موج، از آرایش مشابه کار قبلی استفاده شد[۸]. توری‌های به‌کار رفته دارای گامی برابر $d=1/10\,mm$ بودند و در فاصلهٔ تالبوت $Z_k=9.5cm$ از هم قرار داشتند. باریکهٔ به‌کار رفته دارای توزیع شدت مستطیلی شکل و به ابعاد تلفیق‌گر به‌کار رفته بود. گام الگوی ماره در راستای محورهای x و y به‌ترتیب 0.629 و 0.600 میلی‌متر باشد. به‌منظور تولید موج لاگر-گاوسی، الگوی توری چنگالی فازی با گام کلی $\Lambda=0.06mm$ توسط رایانه روی تلفیق‌گر ایجاد نمودیم. این الگو، فازی به شکل زیر روی موج ورودی سوار می‌کند

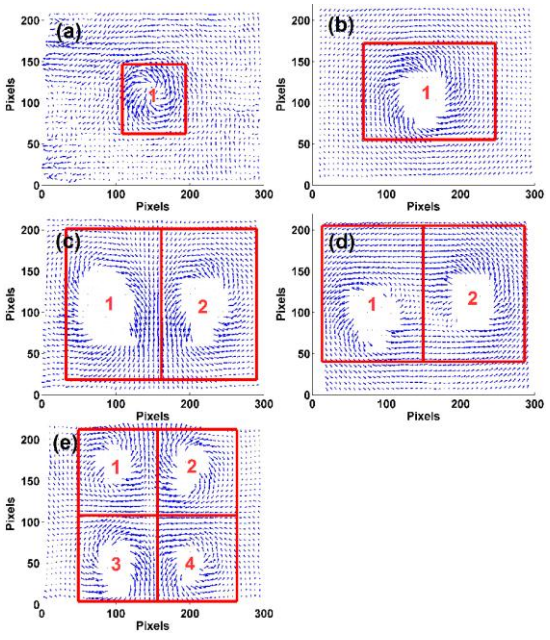
$$ph(x,y)=ph_{\max}\exp\left[2\pi i\frac{x}{\Lambda}-i\sum_{m=1}^{N}l_m\varphi'_m\right], \quad (۴)$$

$ph_{\max}$ بیشینهٔ فازی است که قطعه روی موج سوار می‌کند. l_m ها اعداد صحیحی‌اند که تعداد انشعابات الگوی توری فازی را از نقاط (x_{0m},y_{0m}) تعیین می‌کنند. φ'_mها مختصه‌های زوایای سمتی به مرکزیت نقاط مذکور است و داریم: $\varphi'_m=\arctan(\frac{y-y_{0m}}{x-x_{0m}})$. الگوی فازی فوق، باعث تولید N موج با بارهای توپولوژیکی l_m برای موج mام و به مراکز نقاط (x_{0m},y_{0m}) در مرتبهٔ اول پراش می‌گردد.

شبیه‌سازی عددی شکل‌گیری باریکهٔ لاگر-گوسی چندگانه به‌روش طیفی نیز انجام گردید. در این روش، میدان پرتو ورودی به تلفیق‌گر، به‌صورت موجی با جبههٔ موج تخت و طول‌موج $632.8nm$ و توزیع شدت گاوسی به‌کار برده شد. با جمع فاز این موج با عبارت ۴، موج عبوری از تلفیق‌گر شکل می‌گیرد. سپس با تبدیل فوریه گرفتن از این میدان، به حوزهٔ فرکانسی رفته و در این حوزه آن را انتشار می‌دهیم و درنهایت برای بدست آوردن میدان در حوزهٔ مکانی، از آن تبدیل فوریهٔ عکس می‌گیریم[۱۱].

۴- تعیین مقدار بار توپولوژیکی

در این کار، موج‌های لاگر-گوسی سادهٔ $l=+1$ و $l=+10$ و موج‌های چندگانهٔ $(l_1=l_2=+10)$ و $(l_1=+10,\ l_2=-10)$ و $(l_1=l_4=+5,\ l_2=l_3=-5)$ با اعمال تابع توزیع فضایی فاز روی سطح تلفیق‌گر مطابق رابطهٔ ۴ در مرتبهٔ اول پراش از این الگو ایجاد شد. در هر یک از موج‌های فوق، شیب جبههٔ موج در روی آرایه‌ای از نقاط سطح جبههٔ موج با استفاده از حسگر جبههٔ موج دوکانالهٔ ماره‌ای اندازه‌گیری شد که جزئیات آن در مرجع [۱۲] آمده است. در شکل۱ این بردارهای شیب و نیز مسیرهای انتگرال‌گیری برای محاسبهٔ بار توپولوژیکی هر یک از باریکه‌ها و نیز بار توپولوژیکی ناشی از ترکیب آنها مشاهده می‌شود. مقادیر به‌دست آمده برای این کمیت در مسیرهای مختلف انتگرال‌گیری در جدول۱ آمده است.



شکل ۱: نمایش بردارهای شیب جبههٔ موج روی سطح آنها برای محاسبهٔ بار توپولوژیکی. اضلاع کادرهای قرمز مسیرهای انتگرال‌گیری را نشان می‌دهند. (a) $l=+1$، (b) $l=+10$، (c) $l_2=-l_1=+10$، (d) $l_1=l_2=+10$، (e) $l_1=l_4=+5, l_2=l_3=-5$.

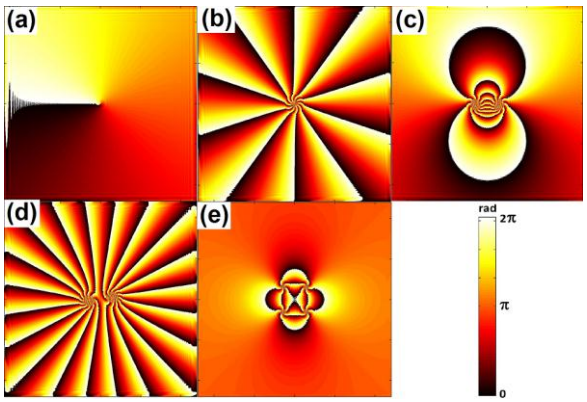
نتایج شبیه‌سازی عددی برای الگوی توزیع فاز پرتوها در فاصلهٔ ۵۰ سانتی‌متری از تلفیق‌گر در شکل ۲ آمده است. چنانچه مشاهده می‌شود، این الگو، حتی در فواصل کم

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

انتشار نیز از ناحیهٔ مرکزیش تغییر می‌یابد و این تغییرات در اثر انتشار به کناره‌ها گسترش می‌یابد. همچنین توزیع فاز موج‌های لاگر-گوسی ساده چنان است که در یک‌دور چرخش در جهت مثلثاتی حول مرکز باریکه‌ای با بار توپولوژیکی l، فاز به‌اندازهٔ $2\pi l$ تغییر می‌کند و در این مسیر، l پلهٔ فازی مشاهده می‌شود. در موج‌های چندگانه، بسته به بارهای توپولوژیکی باریکه‌هایی که در این مسیر بسته قرار می‌گیرند، تغییرات فاز به‌اندازهٔ $2\pi\sum_{m=1}^{N} l_m$ خواهد بود که N، تعداد باریکه‌های محصور در مسیر بسته است. همچنین در فواصل دور از مرکز باریکه، رفتار کلی مجموعهٔ موج‌های چندگانه، مشابه یک موج واحد است. به‌عنوان مثال، در شکل ۲-c بار توپولوژیکی مجموع دو پرتو با $(l_2 = -l_1 = +10)$ صفر است، بنابراین در مسیر بستهٔ شامل دو پرتو، هیچ پلهٔ فازی مشاهده نمی‌شود. در شکل ۲-e برای چهار پرتو با مجموع بار توپولوژیکی صفر، رفتاری مشابه شکل قبلی مشاهده می‌شود، ولی در شکل ۲-d با $(l_1 = l_2 = +10)$، رفتار مجموع دو پرتو، مشابه یک پرتو با بار توپولوژیکی ۲۰ است. نتایج جدول ۱ نیز این موضوع را تأیید می‌کند.

جدول۱: مقادیر به‌دست آمده برای بار توپولوژیکی پرتوهای شکل۱

شمارهٔ حلقه / نام شکل	۱	۲	۳	۴	۱و۲	۳و۴	۱و۳	۲و۴	۱و۲و۳و۴
a	۱/۰۱	–	–	–	–	–	–	–	–
b	۹/۹۳	–	–	–	–	–	–	–	–
c	۱۰/۰۳	۹/۶۹	۱۹/۵۷	–		–	–	–	–
d	−۱۰/۰۸	۹/۸۲	−۰/۲۷	–		–	–	–	–
e	۴/۹۵	−۴/۳۹	−۵/۱۹	۴/۵۷	۰/۶۲	۰/۰۰	−۰/۲۴	۰/۲۱	۰/۰۰



شکل ۲: نتایج شبیه‌سازی‌های عددی برای نمایش توزیع فاز برای موج‌های متناظر با شکل ۱.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این کار از انحراف‌سنجی ماره‌ای به‌منظور به‌دست آوردن بار توپولوژیکی موج چرخان چندگانه که توسط تلفیق‌گر فضایی ایجاد شده بود استفاده گردید. این کار با اندازه‌گیری شیب جبههٔ موج در نقاط مختلف آن و محاسبهٔ انتگرال۳ روی مسیر بسته‌ای که شامل مراکز پرتوهای چرخان بود حاصل گردید. شبیه‌سازی توزیع فاز این پرتوها، تغییراتی را نسبت به حالت انتشار نیافتهٔ آن نشان داد که اندازه‌گیری بار توپولوژیکی پرتو منتشر شده را با ملاحظاتی همچون محدودیت در مسیر انتگرال‌گیری و فاصلهٔ تالبوت در انحراف‌سنج ماره‌ای همراه می‌سازد که باید مورد توجه قرار گیرد.

سپاسگزاری

در پایان لازم است از آقای سهیل مجیری که در این کار از همکاری صمیمانهٔ ایشان بهره‌مند شدیم تشکر نماییم.

مراجع

[1] S. F. Arnold, L. Allen, and M. Padgett, *Advances in optical angular momentum*, Laser & Photonics Reviews, 2 (2008) 299.

[2] M.W.Beijersbergen, L.Allen, H.E.L.O.Veen, J.Woerdman, *Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular Momentum*, Opt. Commun., 96 (1993) 123.

[3] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, and A. G. White, *Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms*, Opt. Lett.,17 (1992) 221.

[4] G. A. Turnbull, D.A. Robertson, G.M. Smith, L. Allen, M.J. Padgett, *The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimeter-wave frequencies by use of a spiral phaseplate*, Opt. Commun., 127 (1996) 183.

[5] E. Karimi, B. Piccirillo, E. Nagali, L. Marrucci, E. Santamato, *Efficient generation and sorting of orbital angular momentum eigenmodes of light by thermally tuned q-plates*, Applied Physics Letters, 94 (2009) 231124.

[6] J. A. Davis, M. J. Yzuel, J. Campos, I. Moreno, A. Marquez, and J. Nicolas, *Review of operating modes for twisted nematic liquid crystal displays for applications in optical image processing*, Proc. SPIE, 5181 (2003) 120.

[7] K. Patorski, *Handbook of the moiré fringe technique*, Elsevier, Amsterdam, 1993.

[8] S. Rasouli, M. Dashti, and A. N. Ramaprakash, *An adjustable, high sensitivity, wide dynamic range two channel wave-front sensor based on moiré deflectometry*, Opt. Express, 18 (2010) 23906.

[9] M. Dashti, S. Rasouli, *Measurement and statistical analysis of the wavefront distortions induced by atmospheric turbulence using two-channel moiré deflectometry*, Journal of Optics, 14 (2012) 095704.

[10] M. Chen, F. S. Roux and J. C. Oli, *Detection of phase singularities with a Shack–Hartmann wavefront sensor*, J. Opt. Soc. Am. A, 24 (2007) 1994.

[11] A. Couairon, E. Brambilla, T. Corti, D. Majus, O. de J. Ramírez-Góngora, M. Kolesik, ractitioner's, *guide to laser pulse propagation models and simulation*, The European Physical Journal Special Topics, 199(2011) 5.

[12] M. Yeganeh, S. Rasouli, M. Dashti, S. Slussarenko, E. Santamato, and E. Karimi, *Reconstructing the Poynting vector skew angle and wavefront of optical vortex beams via two-channel moiré deflectometery*, Optics Letters, 38 (2013) 887-889.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]