بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

مانستگی بین محیط لایه‌ای ناهمسانگرد با محورهای نوری متغیر و فضا-زمان خمیده برای پرتو غیرعادی

سیدعلیرضا موسوی۱، رسول رکنی‌زاده۱ و شهرام دهدشتی۲

۱-گروه فیزیک، گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، ایران-اصفهان- خیابان هزارجریب

۲-مرکز الکترومغناطیس در دانشگاه زیجیانگ، دانشکده علوم اطلاعات و مهندسی الکترونیک، آزمایشگاه تجهیزات مدرن اپتیکی، دانشگاه زیجیانگ، چین، هانزو

چکیده – در اپتیک تبدیل، ما در جستجوی مانستگی فضا-زمان خمیده و محیط‌های ناهمسانگرد تطبیق امپدانسی هستیم. اما این مانستگی در محیط‌های غیر تطبیق امپدانسی درنظر گرفته نشده است. در این مقاله، یک ساختار ریاضی مبتنی بر معادله‌ی موج ویژه مقداری برای تعیین مسیر نور در محیط‌های شامل لایه‌های ناهمسانگرد بنا می‌شود. خواهیم یافت که پرتو غیر عادی این محیط را همانند فضا-زمان خمیده‌ای با متریک وابسته به جهت گیری محورهای اپتیکی می‌بینند.

کلید واژه- پرتوغیرعادی، فضا-رمان خمیده، معادله موج ویژه مقداری، محیط ناهمسانگرد الکتریکی

Analogy between anisotropic layered media with variable optical axes and curve space-time for extra ordinary ray

Sayed Alireza Mousavi1, Rasoul Roknizadeh1, and Shahram Dehdashti2

1 Department of Physics, Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan, Iran

2 The Electromagnetics Academy at Zhejiang University, Department of Information Science & Electronic Engineering, State Key Laboratory for Modern Optical Instrumentation, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

Abstract- In Transformation Optics we search an analogy between curved space-time and impedance-matched media. But this analogy in non-impedance-matched media is not considered in literature. In this paper we develop a mathematical structure based on an eigenvalue wave equation for determining the direction of light in anisotropic layered media. We find that the layered media with variable optical axes is appeared as curved space-time, with an axes-dependent metric, for extraordinary ray.

Keywords: curve space-time, electric anisotropic media, extra ordinary ray

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-12-20]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

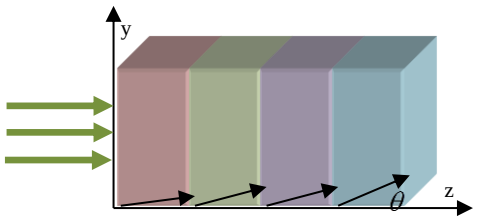
۱- مقدمه

طراحی و ساخت محیط‌های اپتیکی که پدیده‌های مربوط به نسبیت عام اینشتین در آن قابل مشاهده و بررسی باشد، از دیرباز مورد توجه فیزیک پیشه‌گان بوده است و تلاش‌های زیادی دراین مورد انجام شده است. در این زمینه محیط‌های متحرک مهم‌ترین سامانه‌هایی هستند که تاکنون رفتار نور و صوت در آنها بدین منظور بررسی شده‌است [1].

با مطرح شدن اپتیک تبدیل و تناظر بین محیط‌های اپتیکی تطبیق امپدانسی با هندسه‌ی فضا-زمان [2,3]، مانسته‌سازی فضا-زمان‌های خمیده و محیط‌های ایستا مورد توجه بیشتری قرارگرفته است [4-6]. از جمله می‌توان به مانسته سازی نسبیت خاص و فضاهای خمیده در محیط‌هایی شامل لایه‌های نازک همسانگرد، اشاره کرد [7]. همچنین قدرت بسیار بالای این روش کاربردهای بسیار وسیع آن را در بسیاری از شاخه‌های فناوری از جمله نامریی‌سازی و استتار و مانند آنها، باعث شده است [8-10]، که این پیشرفت مدیون پیشرفت‌هایی است که در طراحی و ساخت محیط‌هایی با خصوصیات اپتیکی متفاوت و قابل کنترل در حوزه فن‌آوری نانو و فراماده بدست آمده است [11].

گرچه اپتیک تبدیل عموماً به هندسه فضا-زمان در محیط‌های ناهمسانگرد می‌پردازد اما فقط محدود به محیط‌های تطبیق امپدانسی است و در مورد محیط‌های غیر تطبیق امپدانسی نظری نمی‌دهد. در صورتی‌که به‌نظر می‌رسد با بررسی مسیر انتشار انرژی در محیط‌های ناهمسانگرد می‌توان سامانه‌هایی متشکل از محیط‌های ناهمسانگرد طراحی کرد که فضا-زمان خمیده‌ای را برای نور، بویژه برای پرتوهای غیرعادی، مانسته سازند. زیرا راستای انتشار پرتوهای غیرعادی برخلاف پرتوهای عادی به زاویه‌ی بین بردار موج و محوراصلی بستگی دارد، بنابراین پرتو غیرعادی در محیط ناهمسانگردی مانند شکل(۱)که محورهای اصلی آن نسبت به بردار موج نور متغیر باشد، مسیر خمیده طی می‌کند.

دراین مقاله با محاسبه راستای انتشار انرژی، متریک فضا-زمان خمیده‌ای که پرتو غیرعادی در چنین سامانه‌ای احساس می‌کند را بدست می‌آوریم. این محاسبات را با استفاده از حل معادله موج ویژه‌مقداری انجام خواهیم داد و راهی جدید در دو حوزه مطالعات مواد ناهمسانگرد و مانسته سازی محیط های اپتیکی با فضا-زمان‌های خمیده خواهیم گشود.



تصویر(۱): سامانه‌ای از لایه‌های ناهمسانگرد که راستای محورهای اپتیکی انها با یکدیگر متفاوت است این محیط را می‌توانیم تقریبی از یک محیط ناهمسانگرد با محور اپتیکی متغیر در نظر بگیریم که راستای محور اپتیکی بصورت تابعی از z تغییر میکند.

۲- روش معادله موج ویژه‌مقداری

معادله‌ی موج برای میدان الکتریکی در محیط ناهمسانگرد با استفاده از معادلات ماکسول بصورت زیر است [16]:

$$\vec{k}\times\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)=k_0\overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E} \qquad (۱)$$

که در به‌دست آوردن رابطه‌ی فوق فرض شده است $\vec{D}=\varepsilon_0\overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E}$ ، $\vec{B}=\mu_0\overleftrightarrow{\mu}\vec{H}$ و وابستگی فازی میدانها با فضا و زمان بصورت $\exp(ik\cdot r-i\omega t)$ است.

برای حالت‌هایی که راستای بردار موج در محیط مشخص باشد، مدهای نرمال با استفاده از شکل ویژه مقداری معادله‌ی موج برای چگالی شار الکتریکی، بدست می‌آید [17]. معادله (۱) درشکل ویژه مقداری بصورت زیر در می‌آید:

$$\hat{U}\times\overleftrightarrow{\xi}\left(\hat{U}\times\overleftrightarrow{\eta}\vec{D}\right)=-\frac{1}{n^2}\vec{D} \qquad (۲)$$

که $\hat{U}=\vec{k}/k_0$ ، $\overleftrightarrow{\eta}=\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}$ و $\overleftrightarrow{\xi}=\overleftrightarrow{\mu}^{-1}$.

همچنین معادله موج ویژه‌مقداری برای چگالی شارمغناطیسی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{U}\times\overleftrightarrow{\eta}\left(\hat{U}\times\overleftrightarrow{\xi}\vec{B}\right)=\frac{1}{n^2}\vec{B} \qquad (۳)$$

نمای تانسوری رابطه (۲) در حل مسائل بصورت کلی زیر در می‌آید:

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-12-20]

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = -\frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \qquad (۴)$$

که برای داشتن جواب غیربدیهی، دترمینان ضرایب معادله فوق را باید برابر با صفر گرفت:

$$\det\left(\vec{M} + \frac{1}{n^2}\vec{I}\right) = 0 \qquad (۵)$$

با حل معادلات (۴) و (۵) مدهای نرمال و ضریب شکست مربوط به هر مد بدست می‌آید. میدان الکتریکی و مغناطیسی مربوط به هر مد بااستفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\eta}}{\varepsilon_0}\vec{D} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{\xi}}{\mu_0}\vec{B} \qquad (۶)$$

ضرایب ثابت این بردارها به‌گونه‌ای بهنجار می‌شوند که: $\vec{E}\cdot\vec{E}=1$ و $\vec{H}\cdot\vec{H}=1$ و درنهایت راستای انتشار پرتو که همان راستای انتشار انرژی است از محاسبه بردار پوئینتینگ بدست می‌آید:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \qquad (۷)$$

با استفاده از این ساختار مسیر انتشار پرتو برای هر مد در داخل محیط ناهمسانگرد قابل محاسبه است.

۲-۱- تابش عمود بر لایه ناهمسانگرد

یک لایه‌ی ناهمسانگرد درنظربگیریدکه از ۳ محور اصلی فقط یک محور (در اینجا x) در امتداد محور مختصات انتخابی و دو تای دیگر نسبت به محورهای مختصات چرخیده‌اند (شکل۱). در این بخش مسیر نوری که بصورت عمود در صفحه y-z بر این لایه فرود می‌آید بررسی می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مسئله این لایه را می‌توان یک لایه تک محوری در نظر گرفت که محور اپتیکی آن در صفحه y-z قرار دارد و با محور z زاویه‌ی θ می‌سازد. هنگامی که نور بصورت عمود بر لایه می‌تابد فارغ از اینکه چه قطبشی دارد راستای بردار موج در لایه، همان راستای تابش $\hat{U}=\hat{z}$ است.

حال با استفاده از ساختاری که در قسمت قبل توسعه داده شده ممکن برای انتشار نور از این لایه با فرض اینکه لایه فقط از نظر الکتریکی ناهمسانگرد باشد، یعنی $\vec{\mu}=1$، بررسی می‌شود. با توجه به اینکه محورهای اصلی بر محورهای مختصات منطبق نیستند تانسور $\vec{\varepsilon}$ غیر قطری است و طبق رابطه زیر از تانسور قطری ε_i بدست می‌آید:

$$\vec{\varepsilon}_f = \vec{A}\vec{\varepsilon}_i A^T \qquad (۸)$$

که تانسور A چرخش محورهای مختصات را نسبت به محورهای اصلی برحسب زوایای اویلر بیان می‌کند [18]. در این مسئله محورهای مختصات نسبت به محور نوری به اندازه‌ی زاویه‌ی θ در جهت عقربه های ساعت حول محور x چرخیده‌اند، بنابراین:

$$\vec{A} = \vec{R}_x(-\theta) \qquad (۹)$$

با استفاده از روابط قسمت قبل ویژه مدها و ضرایب شکست و راستای انتشار محاسبه می‌شوند. این محاسبات دو ضریب شکست را نشان می‌دهند، یکی از آنها مستقل از جهت گیری محور نوری است و ضریب شکست عادی نامیده می‌شود:

$$n^2 = \varepsilon_1 = n_1^2 \Rightarrow \vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (۱۰)$$

همانطور که مشخص است این همان مد TE است که قطبش عمود بر صفحه را دارد و راستای انتشار و راستای بردار موج برای آن برهم منطبق هستند. ضریب شکست دوم و مد نرمال آن به‌شکل زیر بدست می‌آیند:

$$n^2 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_2\sin^2\theta + \varepsilon_3\cos^2\theta} \Rightarrow \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

این ضریب شکست به زاویه‌ی بین محور اپتیکی و راستای بردار موج بستگی دارد و مربوط به میدان الکتریکی با قطبش در صفحه است که به آن ضریب غیرعادی و مد مرتبط با آن را پرتو غیر عادی می گویند. راستای انتقال انرژی برای این مد بصورت زیر است:

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-12-20]

$$\vec{S}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2^2\sin^2\theta+\varepsilon_3^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix}0\\(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sin\theta\cos\theta\\\varepsilon_2\sin^2\theta+\varepsilon_3\cos^2\theta\end{pmatrix}\quad(۱۲)$$

همانطور که دیده می‌شود راستای انتشار پرتو غیرعادی به خصوصیات ماده و جهت‌گیری محورهای اصلی آن با راستای بردار موج بستگی دارد. اگر این مشخصات در محیط ناهمسانگرد در مسیر نور تغییر کند. مسیر نور بطور پیوسته تغییر خواهد کرد .

۲-۲- متریک معادل با محیط‌های ناهمسانگرد

با دانستن راستای انتشار پرتو و ضریب شکست، متریک فضای خمیده‌ای که پرتو غیرعادی در عبور از سامانه‌ای به‌شکل (۱) می‌بیند قابل محاسبه است. جزء طول مسیر اپتیکی که پرتو غیرعادی در این سامانه می‌پیماید به‌شکل $n_r^2dl^2$ است. که $n_r=n(\theta)\cos\phi$. بنابراین جزء طول اپتیکی در فضا-زمان بصورت زیر درمی‌آید:

$$ds^2=-c^2dt^2+n_r^2dl^2\quad(۱۳)$$

فاصله در فضا-زمان خمیده برحسب متریک $\vec{g}$ بصورت زیر بیان می‌شود:

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\quad(۱۴)$$

با مشابهت بین روابط (۱۳) و (۱۴) متریک فضا-زمان برای پرتو غیرعادی به‌شکل زیر بدست می‌آید:

$$\vec{g}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&n_r^2(\theta)(1+\tan^2\phi)\end{pmatrix}\quad(۱۷)$$

که ϕ راستای انتشار پرتو است.

$$\tan\phi=\frac{(E_2-E_3)\sin\theta\cos\theta}{\varepsilon_2\sin^2\theta+\varepsilon_3\cos^2\theta}\quad(۱۸)$$

متریک (۱۷) همدیس با فضا-زمان خمیده‌ای با متریک زیر می‌باشد:

$$\vec{g}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{n^2(\theta)}&0\\0&1\end{pmatrix}\quad(۱۹)$$

که $g_{0,0}\neq-1$ و $g_{1,1}=1$ بنابراین متریک (۱۹) فضا-زمان تهی و خمیده را توصیف می‌کند.

۳- نتیجه‌گیری

در این تحقیق نشان دادیم که پرتو عادی و غیر عادی در محیط‌های ناهمسانگرد غیر تطبیق امپدانسی فضا-زمان جداگانه‌ای را احساس می‌کنند. همچنین، محیط ناهمسانگرد با محورهای اپتیکی متغیر، فضا-زمانی خمیده با متریک (۱۹) را برای پرتو هایی با قطبش در صفحه مانسته می‌سازند.

مراجع

[1] Barceló, Carlos, Stefano Liberati, and Matt Visser. "*Analogue gravity*." ***Living Rev. Rel*** 8.12 (2005): 214.

[2] Pendry, John B., David Schurig, and David R. Smith. "Controlling electromagnetic fields." *science* 312.5781 (2006): 1780-1782.

[3] Leonhardt, Ulf, and Thomas G. Philbin. "*General relativity in electrical engineering*." **New Journal of Physics** 8.10 (2006): 247.

[4] Hegde, S. S., and C. V. Vishveshwara. "*Optical analogues of spherically symmetric black hole spacetimes*." **Journal of Physics: Conference Series**. Vol. 484. No. 1. **IOP Publishing**, 2014.

[5] Narimanov, Evgenii E., and Alexander V. Kildishev. "*Optical black hole: Broadband omnidirectional light absorber*." **Applied Physics Letters** 95.4 (2009): 041106.

[6] Lane, Christopher. "*Wave Propagation in Anisotropic Media." The Development of a 2D Ultrasonic Array Inspection for Single Crystal Turbine Blades*. **Springer International Publishing**, (2014). 13-39.

[7] Dehdashti, Sh, R. Roknizadeh, and A. Mahdifar. "*Analogue special and general relativity by optical multilayer thin films: the Rindler space case*." **Journal of Modern Optics** 60.3 (2013): 233-239.

[8] Leonhardt, Ulf, and Thomas Philbin. *Geometry and Light: The Science of Invisibility*. **Courier Dover Publications**, 2010.

[9] McCall, Martin. "*Transformation optics and cloaking*." **Contemporary Physics**54.6 (2013): 273-286.

[10] Cai, Wenshan, et al. "*Optical cloaking with metamaterials*." **Nature photonics**1.4 (2007): 224-227.

[11] Cai, Wenshan, and Vladimir M. Shalaev. *Optical metamaterials*. Vol. 10. Berlin, Germany: **Springer**, 2010.

[12] Hao, Jiaming, and Lei Zhou. "*Electromagnetic wave scatterings by anisotropic metamaterials: Generalized 4× 4 transfer-matrix method*." **Physical Review B**77.9 (2008): 094201.

[13] Teich, MALVIN CARL, and B. E. A. Saleh. "*Fundamentals of photonics*."Canada**, Wiley Interscience** (1991): 3.

[14] Yeh, Pochi. "*Optics of anisotropic layered media: a new 4× 4 matrix algebra*."**Surface Science** 96.1 (1980): 41-53.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-12-20]