بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

بررسی نظری اثر لاوه مبتنی برانتگرال پراش فرنل و سری فوریه

محمد ابوالحسنی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، اراک

چکیده – یک توصیف نظری از اثرلاوه بر مبنای پراش فرنل و نمایش تابع توری پراشنده با سری فوریه ارائه می‌شود. نشان داده شده است که، با دامنه‌ای بودن توریها، به ازای فواصل بین توریها که مضرب زوجی از یک فاصله پایه هستند تابع توزیع شدت در صفحه مشاهده در چیدمان لاوه شبیه تابع عبور شدت توری پراشنده است و به ازای فواصل بین توریها که مضرب فردی از فاصله پایه هستند تابع توزیع شدت در صفحه مشاهده مثل حالت قبل است با این تفاوت که فقط بسامدهای زوج آن حضور دارند.

کلید واژه- اثر لاوه، توری پراش

Theoretical treatment of the Lau Effect Based on Fresnel Diffraction integral and Fourier Series

Mohammad Abolhassani

Department of Physics, Faculty of Science, Arak University, Arak

Abstract- A theoretical explanation of the Lau effect is presented based on Fresnel diffraction theory and Fourier series representation of a grating function. It is shown that, in the case of amplitude diffracting grating, for some gratings separations which are equal to an even multiple of an elementary distance, the intensity distribution function at output plane in Lau setup is similar to transmittance of the diffracting grating. For the gratings distances equal to an odd multiple of the elementary distance the output intensity functions are periodic ones with only even frequencies.

Keywords: The Lau effect, Diffraction grating

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-11-07]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

در سال ۱۹۴۸ لاوه فریزهای خوش تعریفی به ازای فواصل جدایی خاصی بین دو توری در چیدمان شکل ۱ مشاهده کرد [۱]. نور فضاناهمدوس به دو توری، با شیارهای موازی، می‌تابد. به ازای رابطه خاصی بین جدایی توریها، طول موج نور، و دوره توریها یک طرح فریز خوش‌تعریف در صفحه کانون عدسی L ظاهر می‌شود.

اثر لاوه کاربردهای مختلفی مثل تداخل‌سنجی [۲-۳]، آزمون توازی نور [۴]، شکست‌سنجی [۵]، و اندازه‌گیری فاصله کانونی عدسی[۶] دارد.

به همراه این کاربردها محققین زیادی این اثر را با رهیافتهای مختلفی توصیف کرده‌اند. این رهیافتها شامل به کارگیری انتگرال پراش فرنل [۷]، برهمنهی ناهمدوس خود-تصویرها [۸]، نظریه همدوسی [۹]، تابع انتقال اپتیکی [۱۰]، و تصویر برداری توری [۱۱] است.

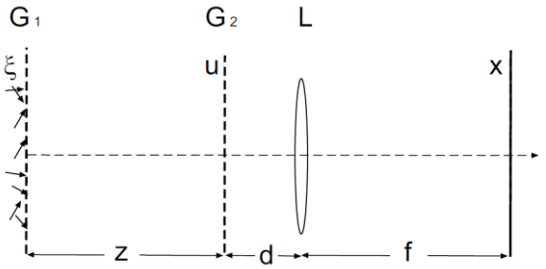
در توصیف اثر لاوه چیدمانهای مختلفی در نظر گرفته شده‌اند. در اینجا چیدمانی در نظر گرفته شده، شکل ۱، که توسط لاوه گزارش شده است و سپس توزیع شدت در صفحه مشاهده محاسبه شده است. دو توری از نوع دامنه‌ای در نظر گرفته شده‌اند. توری اول با شکافهای خیلی باریک و توری دوم با تابع عبور دلخواه فرض شده است.

۲- توزیع شدت در صفحه مشاهده

شکل ۱ چیدمان اثر لاوه را نشان می‌دهد. دو توری پراش دامنه‌ای G_1 و G_2 با یک چشمه نور گسترده مورد تابش قرار می‌گیرند. توزیع شدت در صفحه کانونی عدسی L تشکیل می‌شود. $t_A(x)$ تابع عبور دامنه توری G_2 می‌گیریم. با یک چشمه نقطه‌ای در صفحه ξ در نقطه ξ_0 میدان بلافاصله پشت توری G_2 برابر است با [۱۲]

$$U(u,\xi_0)=\exp(\frac{jk}{2z}u^2)\exp(-\frac{jk}{z}u\xi_0)t_A(u) \qquad (۱)$$

که در آن $k=2\pi/\lambda$، z فاصله بین دو توری، و λ طول موج نور است. در سرتاسر این محاسبه از ضرایب ثابت بی اهمیت در معادلات صرف نظر می‌شوند. میدان در صفحه کانونی عدسی برابر است با [۱۲]



شکل ۱: چیدمان اثر لاوه؛ G_1 و G_2 توریها و L یک عدسی با فاصله کانونی f است.

$$U(x,\xi_0)=\int U(u,\xi_0)\exp(-\frac{jk}{f}ux)du, \qquad (۲)$$

که در آن d فاصله بین توری G_2 و عدسی و f فاصله کانونی عدسی است. با جاگذاری معادله (۱) در معادله (۲) داریم

$$U(x,\xi_0)=\int \exp(\frac{jk}{2z}u^2)\exp(-\frac{jk\xi_0}{z}u) \times t_A(u)\exp(-\frac{jk}{f}ux)du. \qquad (۳)$$

$t_A(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$t_A(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(\frac{j2\pi nu}{p}), \qquad (۴)$$

که p دوره توری G_2 است. با استفاده از معادله (۴) داریم

$$U(x,\xi_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp[-\frac{jk}{2z}(\xi_0+\frac{zx}{f}-\frac{z\lambda n}{p})^2] \times \int \exp[\frac{jk}{2z}(u-\xi_0-\frac{zx}{f}+\frac{z\lambda n}{p})^2]du. \qquad (۵)$$

انتگرال در رابطه بالا یک ثابت است و می‌توان آن را کنار گذاشت. در این صورت با کمی محاسبه داریم:

$$U(x,\xi_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(-\frac{j2\pi\lambda zn^2}{2p^2}) \times \exp[\frac{j2\pi zn}{pf}(x+\frac{f\xi_0}{z})] \qquad (۶)$$

شدت در صفحه xy عبارت است از

$$I(x,\xi_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m^* \exp(\frac{j2\pi\lambda z(m^2-n^2)}{2p^2})$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-11-07]

$$\times \exp[\frac{j2\pi(n-m)z}{pf}(x+\frac{f\xi_0}{z})] \qquad (۷)$$

به ازای دو مقدار از ξ_0 که به اندازه مضربی از p با هم فرق دارند دو توزیع شدت به دست آمده بر هم منطبق می‌شوند.در نتیجه توزیع شدت به دست آمده در صفحه مشاهده به واسطه نور توری G_1 با شدت حاصله به واسطه نور یکی از شکافهای آن مشابه است به شرطی که گام G_1 مضرب صحیحی از p باشد. در این شرایط کافی است که یک شکاف در $\xi=0$ انتخاب کنیم تا توزیع شدت در صفحه xy به دست آید. بنا بر این برای تحلیل اثر لاوه کافی است که تابع زیر را تحلیل کنیم

$$I(x,\xi_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_n a_m^* \times \exp(\frac{j2\pi\lambda z(m^2-n^2)}{2p^2})\exp[\frac{j2\pi(n-m)z}{pf}x] \qquad (۸)$$

با تعریف $q=n-m$ رابطه بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$I(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_n a_{n-q}^* \times \exp(-\frac{j2\pi\lambda zq(2n-q)}{2p^2})\exp(\frac{j2\pi qz}{pf}x) \qquad (۹)$$

قابلیت عبور توری پراشنده نیز عبارت است از

$$|t_A(u)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_n a_{n-q}^*\exp(\frac{j2\pi qz}{p}u) \qquad (۱۰)$$

۳- تحلیل توزیع شدت

حال تابع توزیع شدت را در صفحه مشاهده به ازای فواصل بین دو توری برابر $z=\nu p^2/2\lambda$ ، که ν یک عدد طبیعی است، بررسی و مشخصات آن را تعیین می‌کنیم.

(الف) به ازای $\nu=1$ داریم

$$\exp(-\frac{j2\pi\lambda zq(2n-q)}{2p^2})=\exp(-\frac{j\pi q(2n-q)}{2})$$

بنابراین در این حالت توزیع شدت عبارت است از

$$I(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_n a^*{}_{n-q}$$

$$\times \exp(-\frac{j\pi q(2n-q)}{2})\exp(\frac{j2\pi qz}{pf}x) \qquad (۱۱)$$

این تابع دوره‌ای با دوره pf/z در حالت کلی است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$I(x)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}A_q\exp(\frac{j2\pi q}{p'}x);\quad p'=(f/z)p \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$A_q=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n a^*{}_{n-q}\exp[-\frac{j\pi q(2n-q)}{2}]. \qquad (۱۳)$$

اکنون نشان می‌دهیم که برای یک توری دامنه‌ای، که در آن $a_{-n}=a_n^*$، هماهنگهای فرد در تابع شدت شرکتی ندارند، یعنی $A_{2l+1}=0$.

به ازای $q=2l+1$

$$A_{2l+1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n a_{n-(2l+1)}^* \times \exp[\frac{j\pi(2l+1)(2l-2n+1)}{2}] = j\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n a_n a_{n-(2l+1)}^* \qquad (۱۴)$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_{2l+1}=j[\sum_{n=-\infty}^{l}(-1)^n a_n a_{n-(2l+1)}^* + \sum_{n=l+1}^{\infty}(-1)^n a_n a_{n-(2l+1)}^*]. \qquad (۱۵)$$

با تعریف $k=-n+(2l+1)$ برای جمع اول داریم

$$\sum_{k=l+1}^{l}(-1)^{k+1}a_{-k+(2l+1)}a_{-k}^* = \sum_{k=l+1}^{l}(-1)^{k+1}a_k a_{k-(2l+1)}^* \qquad (۱۶)$$

که صریحاً قرینه جمع دوم است. بنابراین

$$I(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_n a^*{}_{n-2l}\exp(\frac{j4\pi lz}{pf}x) \qquad (۱۷)$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-11-07]

این تابع دوره‌ای با دوره $p_1 = (f/2z)p = f\lambda/p$ است.

(ب) به ازای $\nu = 2$ داریم

$$\exp(-\frac{j2\pi\lambda zq(2n-q)}{2p^2}) = (-1)^q$$

بنابراین در این حالت توزیع شدت عبارت است از

$$I(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} a_n a_{n-q}^* (-1)^q \exp(\frac{j2\pi qz}{pf}x) \qquad (۱۸)$$

که شبیه قابلیت عبور توری است با این تفاوت که به اندازه نیمدوره جابجا شده و گام آن $p_2 = f\lambda/p$ است.

(ج) به ازای $\nu = 3$ داریم

$$\exp(-\frac{j2\pi\lambda zq(2n-q)}{2p^2}) = \exp[\frac{j\pi q(2n-q)}{2}]$$

بنابراین در این حالت توزیع شدت عبارت است از

$$I(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} a_n a_{n-q}^* \times \exp[\frac{j\pi q(2n-q)}{2}]\exp(\frac{j2\pi qz}{pf}x) \qquad (۱۹)$$

با تکرار رویه مورد استفاده در حالت (الف) $I(x)$ با فرمولی به دست می‌آید که با معادله (۱۷) یکسان است. یعنی در این حالت نمایه شدت با حالت (الف) یکی است فقط گام آن $p_3 = (f/2z)p = f\lambda/3p$ می‌شود.

(د) به ازای $\nu = 4$ داریم

$$\exp(-\frac{j2\pi\lambda zq(2n-q)}{2p^2}) = 1$$

بنابراین در این حالت توزیع شدت عبارت است از

$$I(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty} a_n a_{n-q}^* \exp(\frac{j2\pi qz}{pf}x) \qquad (۲۰)$$

که شبیه تابع قابلیت عبور توری است با این تفاوت که گام آن $p_4 = f\lambda/2p$ است.

به ازای مقادیر دیگر ν تابع توزیع شدت مثل چهار حالت قبل ولی با گامهای متفاوت با آنها تکرار می‌شود. در واقع

$$p_{\nu+4} = \frac{\nu}{\nu+4} p_\nu \qquad (۲۱)$$

۴- نتیجه‌گیری

توصیف کاملی از اثر لاوه، در حالتی که توری پراشنده نمایه دلخواهی داشت، به ازای جدایی دو توری برابر مضارب صحیح از $p^2/2\lambda$ باشد ارائه شده است. این توصیف بر اساس انتگرال پراش فرنل و نمایش توری پراشنده با سری فوریه انجام شده است. نشان داده شد که به ازای مضارب زوج $p^2/2\lambda$ توزیع شدت در صفحه خروجی با مربع اندازه تابع عبور دامنه توری پراشنده مشابه است و به ازای مضارب فرد نیز همان نتیجه ولی با حذف بسامدهای فرد آن به دست می‌آید. اغلب اندازه‌گیریها با چیدمان لاوه در شرایطی انجام می‌شوند که فاصله بین دو توری برابر یکی از مقادیری است که در بخش ۳ بررسی شدند. بنابراین، این توصیف در تعبیر نتایج در چنین آزمایشهایی مفید است.

مراجع

[1] Lau V.E., *Beugungserscheinungen an Doppelrastern*, **Ann. Phys.** 6 (1948) 417-423.

[2] Bartelt H. O., Jahns, J., *Interferometry based on the Lau effect*, **Opt. Commun.** 30 (1979) 268-274.

[3] Quan C., Thakur M., Tay C. J., *Lau phase interferometry with a vibrating object*, **Optik**, 117 (2006) 9-14.

[4] Rana S., and Prakash S., *Collimation testing by use of the Lau effect coupled with moiré readout*, **Appl. Opt.** 45 (2006) 3213-3217.

[5] Avudainayagam C. S., Avudainayagam K. V., Atchison D. C., *Lau fringes and subjective refraction*, **Opt. Lett.** 27 (2002) 476-478.

[6] Tay C. J., Thakur M., Chen L., Shakher C., *Measurement of focal length of lens using phase shifting Lau phase interferometry*, **Opt. Commun.** 248 (2005) 339-345.

[7] Jahns J., Lohmann A. W., *The Lau effect (a diffraction experiment with incoherent illumination)*, **Opt.Commun**. 28 (1979) 263-267.

[8] Patorski K., *Incoherent superposition of multiple self-imaging Lau effect and moiré fringe explanation*, **Opt.Acta** 30 (1983) 745-758.

[9] Gori F., *Lau effect and coherence theory*, **Opt. Commun**. 31 (1979) 4-8.

[10] Brenner K. H., Lohmann A. W., Ojeda Castaneda J., Lau effect: OTF theory, **Opt. Commun.** 46 (1983) 14-17.

[11] Swanson G. J. Leith E. N., Lau effect and grating imaging, **J. Opt. Soc. Am.** 72 (1982) 552-555.

[12] Goodman J. W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 1996.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-11-07]