بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

# بررسی عددی انتشار، بازتاب، و شکست نور در یک محیط دوشکستی

فرزاد وزیری علمدارلو و مسعود رضوانی جلال

ملایر، دانشگاه ملایر، گروه فیزیک

**چکیده – در ابتدای این مقاله، فرمول بندی انتشار نور در یک محیط دو شکستی با محور های اپتیکی متعامد به دست می آید. سپس، قوانین بازتاب و شکست در سطح مشترک تخت بین یک محیط همسانگرد و یک محیط دو شکستی استخراج می شوند. در ادامه، فرایند بازتاب و شکست از سطح مشترک مذکور و نیز وجود زوایای بروستر و حد به صورت عددی برای تمام زوایای فرود از محیط همسانگرد به محیط ناهمسانگرد به طور عددی مورد بررسی قرار می گیرد. نشان داده می شود که مقادیر زوایای بروستر و حد به جهت گیری باریکه فرودی وابسته هستند.**

کلید واژه- انتشار، بازتاب، شکست، زاویه بروستر، زاویه حد، محیط دو شکستی.

# Numerical Investigation of Light Propagation, Reflection and Refraction in a Birefringent Medium

Farzad Vaziri Alamdarlo, Masoud Rezvani Jalal

Department of Physics, Malayer University, Malayer

Abstract- In the first part of this paper, the formulation of light propagation in a birefringent medium with orthogonal optical axes is obtained. Then, the laws of reflection and refraction in a plane interface between an isotropic medium and a birefringent medium are extracted. In continuation, the reflection and refraction of light and existence of Brewster and critical angles for all incidence angles from the isotropic medium is numerically investigated. It is shown that Brewster and critical angles are dependent on direction of incident beam.

Keywords: Propagation, Reflection, Refraction, Brewster Angle, Critical Angle, Birefringent Medium.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05 ]

## ۱- مقدمه

با داشتن روابط ساخت مندی الکتریکی و مغناطیسی یک محیط می توان مسئله انتشار امواج الکترومغناطیسی را با استفاده از معادلات ماکسول و اعمال شرایط مرزی و تطبیق فازی استخراج کرد [۱]. متناهی بودن، غیرخطی بودن، ناهمگنی، ناهمسانگردی، و پاشندگی محیط باعث خواهد شد که بررسی مسئله انتشار نور دچار چالش های تحلیلی گردد. همین امر پژوهشگران را وادار کرده است که دنبال حل های عددی به جای جواب های تحلیلی مسئله انتشار باشند. حتی اگر خواص ناهمگنی و غیرخطی محیط ناچیز باشند، خواص ناهمسانگردی محیط به خودی خود می تواند چالش انگیز باشد. بعضی از این ناهمسانگردی ها مانند فعالیت اپتیکی چنان پیچیده و غریب هستند که هنوز هم مدل های مناسب و جامعی برای آنها ارائه نشده است [۲]. در این مقاله انتشار نور در یک محیط نامتناهی، خطی، همگن، غیر پاشنده، و غیر مغناطیسی که دارای ناهمسانگردی دو شکستی با محورهای متعامد است مورد بررسی قرار می گیرد. انتشار نور در چنین محیطی در مراجع مورد بررسی تحلیلی قرار گرفته است ولی جواب های ارائه شده جواب های تحلیلی صریح نیستند [۳] و نیازمند استفاده از محاسبات عددی می باشند. با داشتن جواب های انتشار در محیط های اپتیکی و جفت کردن آنها در مرزها با اعمال شرایط مرزی و تطبیق فازی می توان مسئله بازتاب و شکست را نیز بررسی کرد. از آنجایی که جواب های تحلیلی مسئله انتشار در محیط دو شکستی فاقد شکل صریح هستند نمی توان شرایط مرزی و فازی را بدون استفاده از محاسبات عددی اعمال کرد. همین امر باعث شده است که در مراجع فقط به مسئله انتشار در چنین محیط هایی پرداخته شود و مسئله بازتاب و شکست در آنها (مگر در موارد خاص [۴])، به عهده روش های عددی قرار گیرد.

در این مقاله، از جواب های تحلیلی غیر صریح انتشار استفاده می شود و مسئله بازتاب و شکست برای نوری که از یک محیط همسانگرد به یک محیط دو شکستی تحت زوایای فرود مختلف فرود می آید مورد بررسی عددی قرار می گیرد. نشان داده می شود که نور در حین شکست به محیط ناهمسانگرد، به دو باریکه شکافته می شود. هر کدام از این باریکه ها زوایای بروستر و زوایای حد خاص خود را دارند و این زوایا بر خلاف محیط های همسانگرد، به جهت گیری سمتی باریکه فرودی وابسته اند.

## ۲- روابط تحلیلی

در این قسمت به فرمول بندی انتشار، بازتاب، و شکست در محیط های دو شکستی پرداخته می شود.

### ۲-۱- انتشار

گذردهی الکتریکی یک محیط دو شکستی در چارچوب اصلی به شکل یک ماتریس قطری ۳×۳ است. جواب موج هماهنگ تخت در چنین محیطی با استفاده از معادلات بدون چشمه ماکسول و جایگذاری زیر قابل حصول است [۵]:

$$\vec{\nabla} \to i\vec{k} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \qquad (۱)$$

که در آن k بردار انتشار و ω فرکانس زاویه ای است. اگر $e_k$ بردار یکه انتشار باشد آنگاه استفاده همزمان از قانون آمپر و قانون فارادی به رابطه زیر منجر می شود:

$$\hat{e}_k(\hat{e}_k \,.\, \vec{E}) - \vec{E} + \frac{\omega^2}{k^2 c^2}\vec{\varepsilon} \,.\, \vec{E} = \vec{0} \qquad (۲)$$

با تعریف ضریب شکست موثر به صورت

$$N = \frac{ck}{\omega} \qquad (۳)$$

و قرار دادن آن در معادله (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} n_x^2 - N^2(e_{ky}^2 + e_{kz}^2) & N^2 e_{kx} e_{ky} & N^2 e_{kx} e_{kz} \\ N^2 e_{kx} e_{ky} & n_y^2 - N^2(e_{kx}^2 + e_{kz}^2) & N^2 e_{ky} e_{kz} \\ N^2 e_{kx} e_{kz} & N^2 e_{ky} e_{kz} & n_z^2 - N^2(e_{kx}^2 + e_{ky}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

با صفر کردن دترمینان ماتریس ضرایب برای به دست آوردن جواب های غیر بدیهی خواهیم داشت:

$$\frac{e_{kx}^2}{N^2 - n_x^2} + \frac{e_{ky}^2}{N^2 - n_y^2} + \frac{e_{kz}^2}{N^2 - n_z^2} - \frac{1}{N^2} = 0 \qquad (۵)$$

با معادله (۵) می توان ضریب شکست موثر را در هر جهت محاسبه کرد. چون این معادله بر حسب N درجه دوم است برای هر جهت انتشار دو ضریب شکست موثر تولید



[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05 ]

می کند. جایگذاری این دو ضریب شکست در معادله (۶) دو قطبش الکتریکی برای هر جهت به دست می دهد [۵،۶].

$$E=\left[\frac{e_{kx}}{N^2-n_x^2}\ ,\ \frac{e_{ky}}{N^2-n_y^2}\ ,\ \frac{e_{kz}}{N^2-n_z^2}\right] \qquad (۶)$$

این روابط نشان می دهند که برخلاف محیط همسانگرد، موج تخت در یک محیط ناهمسانگرد فقط دارای دو قطبش در هر جهت انتشار است.

## ۲-۲- بازتاب و شکست

در فرود نور از یک محیط همسانگرد به سطح مشترک تخت یک محیط دو شکستی قسمتی از نور بازتاب و قسمت دیگر به درون محیط دو شکستی وارد می گردد. برای حل این مسئله باید جواب های موج تخت در محیط فرود را به جواب های موج تخت در محیط شکست جفت کرد. شرط تطبیق فازی در سطح مشترک ایجاب می کند:

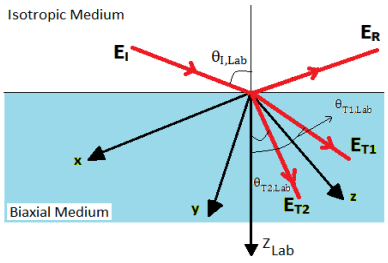
$$n_1 \, Sin\,\theta_1 = N \, Sin\,\theta \qquad (۷)$$

که در آن $n_1$ و $\theta_1$ ضریب شکست و زوایه فرود محیط همسانگرد و N و $\theta$ مقادیر متناظر برای محیط دو شکستی هستند. حل همزمان معادله های (۷) و (۵) دو مقدار برای N به دست می دهد که هر کدام از آنها از طریق معادله (۷) به یک مقدار از $\theta$ مرتبط می شوند. به عبارت دیگر نور در هنگام ورود به محیط دوم به دو باریکه شکسته می شود. این دو باریکه به باریکه کند و باریکه تند (بسته به سرعت فاز) معروف هستند [۲]. با جایگذاری ضریب شکست هر زاویه در معادله (۶)، قطبش هر کدام از این باریکه ها پیدا می شود.

دامنه نور بازتابی و شکست نامعلوم هستند که با اعمال شرایط مرزی حاکم بر میدان ها به دست می آیند. اعمال شرط پیوستگی مؤلفه های مماسی میدان های E و H در مرز مشترک، تمام شرایط مرزی را نیز محقق خواهد ساخت [۱]. با اینکار، چهار معادله به دست می آید که چهار مجهول را که شامل دامنه میدان های شکستی و بازتابی (با دو قطبش مختلف) است به دست می دهد.

## ۳- محاسبات عددی

به عنوان یک مثال عددی، محیط همسانگرد فرود را خلأ با ضریب شکست $n_1$=۱ در نظر می گیریم. محیط دوم نیز یک محیط دو شکستی با ضرایب شکست اصلی $n_x$=۱/۵، $n_y$=۱/۸، و $n_z$=۲/۱ لحاظ می شود (این مقادیر مربوط به محیط خاصی نیستند و صرفاً برای حل عددی انتخاب شده اند). سطح مشترک بین این دو محیط را می توان با هر زاویه دلخواهی نسبت به محورهای اپتیکی برش داد. یک سیستم مختصات دکارتی آزمایشگاهی تعریف می شود که محورهای $x_{Lab}$ و $y_{Lab}$ در سطح مشترک و محور $z_{Lab}$ عمود بر آن به سمت محیط دو شکستی باشد. شکل ۱.




شکل ۱: طرحواره فرود نور از محیط همسانگرد به یک محیط دوشکستی.

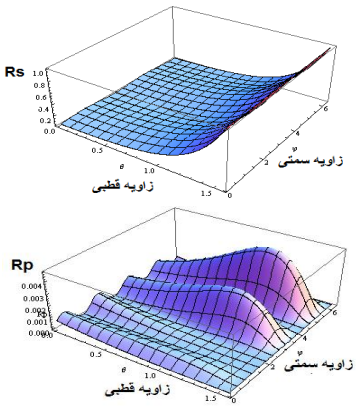
این چارچوب را می توان با زوایای چرخش اولر به محورهای اپتیکی منطبق کرد. برای مثال این زوایا به صورت $\alpha=\pi/5$، $\beta=\pi/6$، و $\gamma=\pi/7$ انتخاب می شوند. برنامه رایانه ای توسط نویسندگان مقاله حاضر توسعه یافته است که باریکه نور را تحت زوایای قطبی و سمتی مختلف (نسبت به چارچوب آزمایشگاه) به سطح مشترک می تاباند و بعد از پیدا کردن ضرایب شکست موثر و زوایای شکست مربوطه، شرایط مرزی را اعمال کرده و دامنه میدان ها را برحسب دامنه فرود محاسبه می کند. برای نمونه، یک میدان فرودی با قطبش s را در نظر می گیریم. در شکل ۲ شدت میدان بازتابشی در قطبش های s (شکل ۲-بالا) و p (شکل ۲-پایین) بر حسب زاویه فرودی قطبی از ۰ تا $\pi$ و زاویه سمتی فرودی از ۰ تا $2\pi$ درجه ترسیم شده است. این شکل نشان می دهد که برخلاف محیط های همسانگرد، که قطبش فرودی s را فقط به قطبش بازتابی s تبدیل می کنند، محیط دو شکستی در بازتاب قطبش s، هم قطبش s و هم



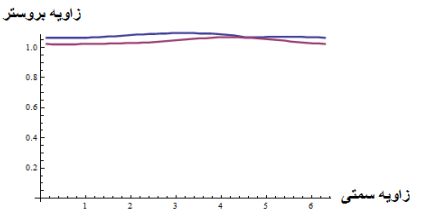
[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05 ]

قطبش p تولید می کند. در گام بعدی زوایای بروستر و حد بررسی می شوند. با استفاده از برنامه رایانه ای مذکور، می توان زوایای شکست را رصد کرده و زوایه فرودی را که در آن یک یا هر دو زاویه شکست در شرط بروستر و شرط زاویه حد صدق کنند شناسایی کرد. در شکل ۳ زاویه بروستر برحسب زاویه سمتی ترسیم شده است. دقت در این نمودار نشان می دهد که برای هر کدام از باریکه های کند و تند یک زاویه بروستر وجود دارد. از آنجایی که باریکه کند دارای ضریب شکست بزرگ تر از باریکه تند است پس با زاویه کوچک تری نسبت به آن می شکند. به همین خاطر نمودار بالا به باریکه کند مربوط است که زاویه بروستر بزرگ تری نسبت به باریکه تند دارد. هر دوی این زوایا به زاویه سمتی بستگی دارند.

برای این مورد هیچ زاویه حدی مشاهده نشد که آنرا می توان به رقیق بودن محیط فرود (خلأ) نسبت داد.

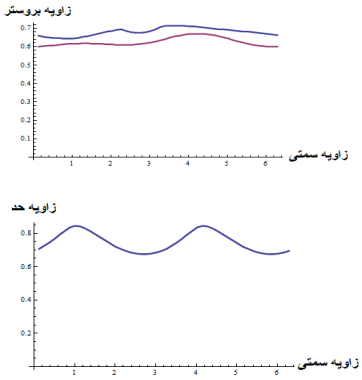



شکل ۲: ضریب انعکاس از محیط دو شکستی برای فرودی با قطبش s که منجر به بازتابش قطبش s، (بالا)، و قطبش p، پایین، شده است. در این شکل و شکل های بعدی همه زوایا بر حسب رادیان هستند.




شکل ۳: زاویه بروستر برای باریکه کند (نمودار بالا)، و باریکه تند (نمودار پایین) بر حسب زاویه سمتی فرود.

در جستجو برای زاویه حد، محیط فرود یک محیط غلیظ با ضریب شکست $n_1$=۲/۴ در نظر گرفته شد. در شکل های ۴-بالا و ۴-پایین زوایای بروستر و زاویه حد ترسیم شده اند. از آنجایی که یکی از باریکه ها زودتر به زاویه حد می رسد و بعد از آن با زوایای مختلط به شکست ادامه می دهد امکان محاسبه زاویه حد برای باریکه دوم از طریق فرمول بندی ارائه شده وجود ندارد.




شکل ۴: زاویه بروستر، شکل بالا، و زاویه حد، شکل پایین، برای فرود از محیط همسانگرد غلیظ به محیط ناهمسانگرد رقیق.

## نتیجه‌گیری

بررسی عددی بازتاب و شکست در محیط دو شکستی نشان می دهد که نور فرودی به دو باریکه می شکند و قطبش های نور فرودی بعد از بازتاب به هم تبدیل می شوند. از طرفی دیگر برای هر کدام از باریکه های شکست یک زاویه بروستر و برای فرود از محیط غلیظ به رقیق برای یکی از باریکه ها یک زاویه حد وابسته به زاویه سمتی فرود وجود دارد.

## سپاسگزاری

از دانشگاه ملایر به خاطر فراهم آوردن امکانات جهت به ثمر رسیدن این کار تشکر می شود.

## مراجع

[۱] جان، ر. ریتس و همکاران؛ *مبانی نظریه الکترومغناطیس*؛ ویراش سوم، ترجمه جلال صمیمی و همکاران، (۱۹۷۹).

[۲] یوجین هشت و همکاران؛ *نورشناخت*، ویراش سوم؛ ترجمه پروین بیات مختاری و همکاران، (۱۹۷۴).

[۳] J. Lee and S. Lee, *General Solution of EM Wave Propagation in Anisotropic Media*, **Korean Physical Society**, Vol. **57**, No. **1** ( 2010).

[۴] C. M. Chang and H. D. Shieh; *Simple Formulas for Calculating* Wave, *Propagation and Splitting in Anisotropic Media*, Japan. **J. Appl. Phys.**, Vol. **40** (2001).

[5] A. Yariv**,** *Optical Waves in Crystals***,** John Wiley and Sons, (1984).

[۶] S. J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*, 6th edition, Rutgers University, (2008).



[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05 ]