بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

بررسی برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی در برهم‌کنش دو اتم دوترازی با میدان دومدی دوجمله‌ای با جفت‌شدگی وابسته به شدت

حمیده حکمت‌آرا[۱] و محمدکاظم توسلی[۱و۲]

[۱]گروه اتمی - مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

[۲]گروه پژوهشی فوتونیک، مرکزتحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – در این مقاله با استفاده از تعمیم مدل جینز-کامینگز، برهم‌کنش دو اتم دوترازی با میدان دومدی بینومیال در یک رژیم غیرخطی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. پس از به‌دست آوردن شکل صریح و دقیق تابع موج سامانه، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن، از جمله آمار زیرپواسونی و وارونی جمعیت را بررسی و مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم و از این طریق غیرکلاسیکی بودن حالت به‌دست آمده را به روشنی تبیین می‌کنیم.

کلید واژه: برهم‌کنش اتم-میدان، ویژگی‌های غیرکلاسیکی، مدل جینز-کامینگز، میدان بینومیال.

Investigating a Few Nonclassicality Features of Two Two-Level Atoms Interacting with a Two-Mode Binomial Field with Intensity-Dependent Coupling

Hamideh HekmatAra[1] and Mohammad Kazem Tavassoly[1,2]

[1]Atomic and Molecular Group, Department of Physics, University of Yazd, Yazd

[2]Photonics Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, via the generalization of Jaynes-Cummings model, we study the interaction between two two-level atoms with two-mode binomial field in the intensity-dependent coupling regime. After obtaining the explicit and accurate form of the corresponding wave function, we investigate a few nonclassicality features such as sub-Poissonian statistics and atomic inversion. In this way, we establish the nonclassicality of the obtained state.

Keywords: Atom-field interaction, Nonclassicality features, Jaynes-Cummings Model, Binomial field.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]

۱- مقدمه

مدل جینز-کامینگز یکی از ساده‌ترین مدل‌های کوانتومی است که برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد را توصیف می‌کند [۱]. با توجه به اهمیت این موضوع در فیزیک لیزر و اپتیک کوانتومی، اخیرا این مدل موضوع بسیاری از پژوهش‌های نظری و تجربی قرار گرفته است. یکی از نتایج تاییدشده این مدل پیش‌بینی پدیده فروافت و بازیافت در وارونی جمعیت است [۱]، که همتای کلاسیکی ندارد. برای این مدل تعمیم‌های متفاوتی درنظر گرفته شده است. برهم‌کنش دو اتم دوترازی با یک میدان "تک‌مد" بینومیال با جفت‌شدگی "ثابت" به عنوان یکی از این تعمیم‌ها در مرجع [۲] مطرح و بررسی شده است. هدف ما در این مقاله، تبدیل میدان "تک‌مد" به "دومد" و واردکردن عامل جفت‌شدگی "وابسته به شدت" در هامیلتونی برهم‌کنش سامانه است. خوشبختانه علی‌رغم پیچیدگی مسئله، هنوز قادر به حل تحلیلی آن خواهیم بود. همان‌گونه که خواهیم دید، با انتخاب توابع غیرخطی $f(n)$ متفاوت به رده‌های گوناگونی از سامانه‌های اتم-میدان که قطعاً ویژگی‌های متفاوتی خواهند داشت دست خواهیم یافت.

۲- سامانه‌ی اتم-میدان

به منظور به‌دست آوردن تابع موج سامانه‌ی موردنظر، ابتدا هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم دوترازی با میدان دومدی را براساس مدل جینز-کامینگز [۲و۳] به صورت زیر تعمیم می‌دهیم ($\hbar=1$):

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_I \qquad (۱)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0&=\sum_{j=1,2}\left(\omega_1|e_j\rangle\langle e_j|+\omega_2|g_j\rangle\langle g_j|\right)+\sum_{k=1,2}\Omega_k\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\\ \hat{H}_I&=\lambda\sum_{j=1,2}\left(\hat{R}_1\hat{R}_2|e_j\rangle\langle g_j|+\hat{R}_1^\dagger\hat{R}_2^\dagger|g_j\rangle\langle e_j|\right)\end{aligned} \qquad (۲)$$

در این‌جا ترازهای اتمی را با نماد $|e_j\rangle$ و $|g_j\rangle$ نمایش داده‌ایم که j به عنوان شمارنده‌ی اتمی فقط مقادیر ۱ و ۲ را می‌گیرد، ω_1 و ω_2 به‌ترتیب بسامدهای اتمی حالت برانگیخته و پایه، $\Omega_k\ (k=1,2)$ بسامد میدان دومدی کوانتیده، $|g_j\rangle\langle e_j|\left(|e_j\rangle\langle g_j|\right)$ عملگرهای بالابرنده (پایین‌آورنده) اتمی، $\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش میدان مربوط به مد kام و λ ثابت جفت‌شدگی است که جهت سهولت برای هر دو مد یکسان گرفته شده است. عملگرهای $\hat{R}_k$ و $\hat{R}_k^\dagger$ از عملگرهای میدان دومدی $\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger$ ساخته می‌شوند و در واقع تعمیمی از آن‌ها هستند که در یک فرآیند غیرخطی‌سازی به صورت زیر بنا می‌شوند:

$$\hat{R}_k=\hat{a}_k f(\hat{n}_k),\ \hat{R}_k^\dagger=f(\hat{n}_k)\hat{a}_k^\dagger,\quad k=1,2 \qquad (۳)$$

حالت اولیه اتمی را به صورت برهم‌نهی‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}|\varphi_A(0)\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,e\rangle+|g,g\rangle\right)\\ |\phi_A(0)\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,g\rangle+|g,e\rangle\right)\\ |\psi_A(0)\rangle&=\frac{1}{2}\left(|e,e\rangle+|e,g\rangle+|g,e\rangle+|g,g\rangle\right)\end{aligned} \qquad (۴)$$

می‌توان همه‌ی موارد بالا را به شکل واحدی به صورت

$$|\Psi_A(0)\rangle=\gamma_1|e,e\rangle+\gamma_2|e,g\rangle+\gamma_3|g,e\rangle+\gamma_4|g,g\rangle \qquad (۵)$$

نوشت. حالت اولیه میدان که به صورت یک میدان دومدی بینومیال است که به شکل زیر توصیف می‌شود [۴]:

$$|\psi_F(0)\rangle=|p,M\rangle=\sum_{n=0}^{M}B_n^M\,|n,M-n\rangle \qquad (۶)$$

که در آن:

$$B_n^M=\left[\frac{M!}{n!(M-n)!}p^n(1-p)^{M-n}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷)$$

در این‌جا M یک عدد صحیح مثبت و p مقادیر بین صفر تا یک را می‌گیرد. تابع موج سامانه در هر لحظه‌ی t را به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle=\sum_{n=0}\Big(&A(n,M-n,t)|e,e,n,M-n\rangle\\ &+B(n+1,M-n+1,t)|e,g,n+1,M-n+1\rangle\\ &+C(n+1,M-n+1,t)|g,e,n+1,M-n+1\rangle\\ &+D(n+2,M-n+2,t)|g,g,n+2,M-n+2\rangle\Big)\end{aligned} \qquad (۸)$$

برای به‌دست آوردن هرگونه اطلاعاتی در مورد سامانه، باید

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]

شکل دقیق تابع موج را در هر لحظه از زمان داشته باشیم که این امر نیز به نوبه‌ی خود نیازمند این است که دامنه‌های احتمال A، B، C و D مشخص شوند. با جایگزینی معادله (۸) و $\hat{H}_I$ در معادله شرودینگر وابسته به زمان $\hat{H}_I|\psi(t)\rangle = i(\partial/\partial t)|\psi(t)\rangle$ به معادلات جفت‌شده‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
i\dot{A}(n,M-n,t) &= \lambda k_1(n) C(n+1,M-n+1,t) \\
&\quad + \lambda k_1(n) B(n+1,M-n+1,t) \\
i\dot{B}(n+1,M-n+1,t) &= i\dot{C}(n+1,M-n+1,t) \\
&= \lambda k_2(n) D(n+2,M-n+2,t) \\
&\quad + \lambda k_1(n) A(n,M-n,t) \\
i\dot{D}(n+2,M-n+2,t) &= \lambda k_2(n) C(n+1,M-n+1,t) \\
&\quad + \lambda k_2(n) B(n+1,M-n+1,t)
\end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن برای سادگی از تعاریف زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
k_1(n) &= f(n+1) f(M-n+1)\sqrt{(n+1)}\sqrt{(M-n+1)} \\
k_2(n) &= f(n+2) f(M-n+2)\sqrt{(n+2)}\sqrt{(M-n+2)}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

پس از محاسباتی طولانی، ضرایب A ، B، C و D به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
A(n,M-n,t) &= \varepsilon_3(n) - \frac{ik_1(n)}{\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}}\Big\{\varepsilon_1(n) \\
&\quad \times \sin\left[\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}\lambda t\right] - \varepsilon_2(n) \\
&\quad \times \cos\left[\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}\lambda t\right]\Big\} \\
B(n+1,M-n+1,t) &= C(n+1,M-n+1,t) = \frac{\varepsilon_1(n)}{2} \\
&\quad \times \cos\left[\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}\lambda t\right] \\
&\quad + \frac{\varepsilon_2(n)}{2} \\
&\quad \times \sin\left[\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}\lambda t\right] \\
D(n+2,M-n+2,t) &= \varepsilon_4(n) - \frac{ik_2(n)}{\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}} \\
&\quad \times \left\{\varepsilon_1(n)\sin\left[\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}\lambda t\right]\right. \\
&\quad \left. -\varepsilon_2(n)\cos\left[\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}\lambda t\right]\right\}
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در آن نمادهای زیر را اختیار کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(n) &= (\gamma_2+\gamma_3) B_{n+1}^M \\
\varepsilon_2(n) &= \frac{-2i}{\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}}\left[\gamma_4 B_{n+2}^M k_2(n) + \gamma_1 B_n^M k_1(n)\right] \\
\varepsilon_3(n) &= \frac{k_2(n)}{\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}}\left[\gamma_1 B_n^M k_2(n) - \gamma_4 B_{n+2}^M k_1(n)\right] \\
\varepsilon_4(n) &= \frac{k_1(n)}{\sqrt{2k_1^2(n)+2k_2^2(n)}}\left[\gamma_4 B_{n+2}^M k_1(n) - \gamma_1 B_n^M k_2(n)\right]
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

۳- ویژگی‌های غیرکلاسیکی

با مشخص‌شدن شکل صریح تابع موج در برهم‌کنش مورد نظر، به بررسی برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه می‌پردازیم. هر چند نتایج به‌دست آمده قابلیت و توانایی استفاده از هر تابع غیرخطی متناظر با هر سامانه‌ی کوانتومی را دارد، ولی در این مقاله تابع غیرخطی زیر که کاربرد آن برای توصیف حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده به روشنی تبین شده است را درنظر می‌گیریم [۵]:

$$f(n) = \frac{L_n^1(\eta^2)}{(n+1)L_n^0(\eta^2)}, \qquad \eta < 1 \tag{۱۳}$$

که در آن η پارامتر لمب-دیک و $L_n^m(x)$ چندجمله‌ای‌های لاگر هستند.

تابع هم‌بستگی بین مد اول و دوم:

برای بررسی آمار کوانتومی، از تابع هم‌بستگی $g_{12}^2(0)$ استفاده کرده‌ایم که به شکل زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$g_{12}^2(0) = \left\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right\rangle \left(\left\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right\rangle \left\langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right\rangle \right)^{-1} \tag{۱۴}$$

اگر $g_{12}^2(0) < 1$ $\left(g_{12}^2(0) > 1\right)$ باشد، حالت مورد نظر ویژگی زیرپواسونی (فراپواسونی) از خود بروز می‌دهد، و اگر $g_{12}^2(0) = 1$ باشد حالت مربوطه مانند حالت‌های همدوس رفتار می‌کند.

پارامتر مندل:

پارامتر مندل یکی دیگر از پارامترهای مناسب برای توصیف آمار کوانتومی حالت‌ها و تبیین ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$Q_i = \left(\left\langle \hat{a}_i^{\dagger 2} \hat{a}_i^2 \right\rangle - \left\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right\rangle^2 \right) \left(\left\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \right\rangle \right)^{-1}, \quad i = 1,2 \tag{۱۵}$$

این کمیت برای حالت‌های همدوس استاندارد مقدار صفر،

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]

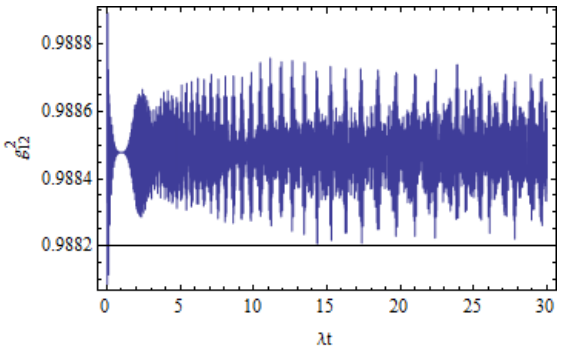
و برای حالت‌های غیرکلاسیکی و کلاسیکی به ترتیب کوچکتر و بزرگتر از صفر است.

وارونی‌جمعیت:

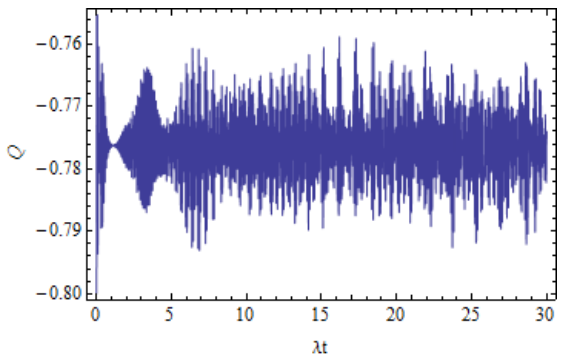
یکی دیگر از معیارها برای بررسی دینامیک برهم‌کنش‌های اتم-میدان یک سامانه وارونی جمعیت است. به‌ویژه اگر در افت و خیزهای نمودارهای وارونی‌جمعیت شاهد فروافت و بازیافت باشیم، می‌توان گفت پدیده‌ای غیرکلاسیکی اتفاق افتاده است. وارونی‌جمعیت برای برهم‌کنش دو اتم دوترازی با میدان به صورت تعریف شده است [۸]:

$$S_z=\sum_{n=0}\left(|A(n,M-n,t)|^2+|B(n+1,M-n+1,t)|^2\right)$$
$$-\sum_{n=0}\left(|C(n+1,M-n+1,t)|^2+|D(n+2,M-n+2,t)|^2\right) \quad (۱۶)$$

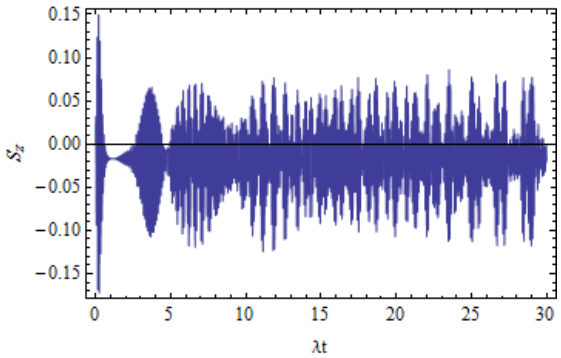
هرچند که ما محاسباتمان را برای حالت‌های اولیه‌ی اتمی گوناگون و پارامترهای متفاوتی انجام داده‌ایم ولی در این‌جا فقط نمودار کمیت‌های مورد بحث را برحسب زمان مشخصه λt با در نظر گرفتن حالت اولیه اتمی $|\varphi_A(0)\rangle$ برای تابع جفت‌شدگی (۱۳)، به‌ازای پارامترهای $M=80$، $p=0.8$ و $\eta=0.02$ ارائه می‌کنیم.



شکل۱: نمودار تابع هم‌بستگی بین مدها برحسب زمان مشخصه λt.



شکل۲: نمودار پارامتر مندل برحسب زمان مشخصه λt.



شکل۳: نمودار وارونی جمعیت برحسب زمان مشخصه λt.

۴- نتایج:

همان‌طور که در شکل (۱) دیده می‌شود پدیده‌ی غیرکلاسیکی زیرپواسونی اتفاق می‌افتد. گرچه تابع هم‌بستگی بین مدها آمار کوانتومی را نشان می‌دهد ولی برای بررسی بیشتر آن، پارامتر مندل را مورد بررسی قرار دادیم. در شکل (۲) قابل ملاحظه بودن آمار زیرپواسونی (غیرکلاسیکی) را به خوبی مشاهده می‌کنیم. همچنین نمودار وارونی‌جمعیت و افت‌وخیزهای آن برحسب زمان در شکل (۳) نشان داده شده است. تمام نمودارها دربردارنده‌ی پدیده‌ی فروافت و بازیافت (کوانتومی محض) هستند.

مراجع

[1] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2001.

[2] Q. Liao, G. Fang, Y. Wang, M. A. Ahmad, S. Liu, *Single atom entropy squeezing for two two-level atoms interacting with a binomial field*, p. 1392, **Optik 122**, 2011.

[3] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser*, p. 89, **Proc. IEEE. 51**, 1963.

[4] D. Stoler, B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Binomial states of the quantized radiation field*, p. 345, **OPTICA ACTA 32**, 1985.

[5] R. L. de Matos Filho and W. Vogel, *Nonlinear coherent states*, p. 4560, **Phys. Rev. A 54**, 1996.

[6] D. F. Walls and G. J. Millburn, *Quantum Optics*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1995.

[7] L. Mandel, *Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence*, p. 205, **Opt. Lett. 4**, 1979.

[8] A. –S. F. Obada, M. M. A. Ahmed, E. M. Khalil and S. I. Ali, *Entangled two two-level atoms interacting with a cavity field in the presence of the stark shift terms*, p. 215, **Opt. Commun. 287**, 2013.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]