بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

درهم‌تنیدگی در برهم‌کنش غیرخطی دو اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد در حضور اثرهای کر و استارک با گذارهای چندفوتونی

حمیدرضا باغشاهی[۱و۳]، محمد کاظم توسلی[۱و۲] وعباس بهجت [۱و۲]

[۱]گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲]گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد
[۳]گروه فیزیک، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده– در این مقاله برهم‌کنش دو اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد غیرخطی در حضور اثرهای کر و استارک را با لحاظ‌کردن گذارهای چندفوتونی در یک رژیم غیرخطی در نظرگرفته‌ایم. پس از به‌دست آوردن جواب تحلیلی برای سامانهٔ اتم-میدان و انتخاب یک تابع غیرخطی معین، آنتروپی‌خطی را به‌عنوان میزان درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان مورد بررسی قرارمی‌دهیم. در این پژوهش، یک تابع غیرخطی ویژه را به عنوان تحقق فیزیکی این ساختار در نظر گرفته‌ایم.

کلید واژه- اثر کر، آنتروپی خطی، درهم‌تنیدگی کوانتومی، اثر استارک.

Entanglement in the Nonlinear Interaction of Two Two-Level Atoms with a Single-Mode Cavity Field in the Presence of Stark Effect and Kerr Medium with Multi-Photon Process

Hamid Reza Baghshahi[1,3], Mohammad Kazem Tavassoly[1,2] and Abbas Behjat[1,2]

[1]Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

[2]Photonics Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

[3]Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract- In this paper we consider the interaction between two two–level atoms with a nonlinear single-mode cavity field in the presence of the Stark effect and Kerr medium by considering multi-photon processes in the nonlinear regime. After obtaining the explicit form of the atom-field wave function and choosing a particular nonlinearity function, linear entropy as a measure of atom–field entanglement has been investigated. As a physical realization, we examined the approach by considering a particular nonlinearity function.

Keywords: Kerr medium, Linear entropy, Quantum entanglement, Stark shift.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]

۱- مقدمه

یکی از ویژگی‌های کاملاً غیرکلاسیکی برخی از سامانه‌های کوانتومی، درهم‌تنیدگی است که آن‌ها را از سامانه‌های کلاسیکی متمایز می‌سازد. این ویژگی کوانتومی، نقش مهمی در نظریه اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... ایفا می‌کند [۱]. یکی از روش‌های ایجاد سامانه‌های درهم‌تنیده، فراهم آوردن برهم‌کنش اتم و میدان است. ساده‌ترین راه برای بررسی کاملاً کوانتومی برهم‌کنش اتم-میدان و ایجاد درهم‌تنیدگی بین آنها مدل جینز-کامینگز است [۲]، که برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد را توصیف می‌کند. به این مدل تعمیم‌های زیادی داده شده است. یکی از این تعمیم‌ها، در نظر گرفتن دو یا چند اتم به جای یک اتم است [۳]. در این مقاله برهم‌کنش دو اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد غیرخطی با گذارهای چندفوتونی در حضور اثرهای کر و استارک در یک رژیم غیرخطی (تغییرشکل‌یافتهٔ f) را درنظرگرفته و با انتخاب یک تابع غیرخطی معین ($f(n)=\sqrt{n}$)، آنتروپی خطی را به عنوان معیار درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان، مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین اثرهای کر و استارک، پارامتر نامیزانی و جفت‌شدگی وابسته به شدت را بر میزان درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲- سامانه فیزیکی و هامیلتونی آن

هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم دوترازی یکسان با یک میدان تک‌مد غیرخطی با گذارهای چندفوتونی در حضور اثرهای کر و استارک در یک رژیم غیرخطی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\nu\hat{A}^{\dagger}\hat{A}+\sum_{j=1,2}\frac{\omega}{2}\hat{\sigma}_z^{(j)}+\chi\hat{A}^{\dagger^2}\hat{A}^2\\&+\hat{A}^{\dagger k}\hat{A}^k\sum_{j=1,2}(\beta_1\hat{\sigma}_-^{(j)}\hat{\sigma}_+^{(j)}+\beta_2\hat{\sigma}_+^{(j)}\hat{\sigma}_-^{(j)})\\&+\lambda\sum_{j=1,2}(\hat{\sigma}_+^{(j)}\hat{A}^{2k}+\hat{\sigma}_-^{(j)}\hat{A}^{\dagger 2k})\end{aligned}\qquad(۱)$$

که در آن ω بسامدگذار اتمی، λ ثابت جفت‌شدگی اتم و میدان، ν بسامد میدان، $\hat{\sigma}_{\pm}$ و $\hat{\sigma}_z$ عملگرهای گذار و وارونی جمعیت مربوط به اتم‌ها، χ پذیرفتاری مرتبه سوم (مربوط به اثر کر)، β_1 و β_2 ضرایب استارک و برچسب‌های j شمارندهٔ اتم‌های ۱ و ۲ هستند. هم‌چنین $\hat{A}$ و $\hat{A}^{\dagger}$ عملگرهای نابودی و آفرینش تغییر شکل‌یافتهٔ $\hat{A}=\hat{a}\,f(\hat{n})$ و $\hat{A}^{\dagger}=f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}$ هستند که در آنها $f(n)$ یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. با استفاده از تعریف عملگرهای $\hat{A}$، $\hat{A}^{\dagger}$ و پارامتر نامیزانی به صورت $\Delta=\omega-k\nu$ هامیلتونی (۱) به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\nu(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,f^2(\hat{n})+\frac{k}{2}\sum_{j=1,2}\hat{\sigma}_z^{(j)})\\&+\sum_{j=1,2}\frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z^{(j)}+\chi\hat{n}(\hat{n}-1)f^2(\hat{n})f^2(\hat{n}-1)\\&+(\frac{[f(\hat{n})]!}{[f(\hat{n}-k)]!})^2\hat{a}^{\dagger k}\hat{a}^k\sum_{j=1,2}(\beta_1\hat{\sigma}_-^{(j)}\hat{\sigma}_+^{(j)}+\beta_2\hat{\sigma}_+^{(j)}\hat{\sigma}_-^{(j)})\\&+\lambda\sum_{j=1,2}(\hat{\sigma}_+^{j}\hat{a}^{2k}\frac{[f(\hat{n})]!}{[f(\hat{n}-2k)]!}+\hat{\sigma}_-^{(j)}\frac{[f(\hat{n})]!}{[f(\hat{n}-2k)]!}\hat{a}^{\dagger 2k})\end{aligned}\qquad(۲)$$

حال تابع موج دو اتم دوترازی در هر لحظه از زمان را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle&=\sum_{n=0}^{\infty}\exp[-i\nu(\hat{n}\,f^2(\hat{n})+\frac{k}{2}\sum_{j=1}^{2}\hat{\sigma}_z^{(j)})]\\&\times q_n\begin{bmatrix}A_n(t)e^{-i\gamma_1 t}|n,e,e\rangle+B_{n+2k}(t)e^{-i\gamma_2 t}(|n+2k,g,e\rangle+\\|n+2k,e,g\rangle)+C_{n+4k}(t)e^{-i\gamma_3 t}|n+4k,g,g\rangle\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(۳)$$

که در آن نمادهای زیر اختیار شده است:

$$\begin{aligned}\gamma_1(n)&=\Delta+\chi n(n-1)f^2(n)f^2(n-1)\\&+2\beta_2\frac{n!}{(n-k)!}(\frac{[f(n)]!}{[f(n-k)]!})^2\\\gamma_2(n)&=\chi(n+2k)(n+2k-1)f^2(n+2k)f^2(n+2k-1)\\&+(\beta_1+\beta_2)(\frac{(n+2k)!}{(n+k)!}(\frac{[f(n+2k)]!}{[f(n+k)]!})^2)\\\gamma_3(n)&=-\Delta+\chi(n+4k)(n+4k-1)f^2(n+4k)f^2(n+4k-1)\\&+2\beta_1\frac{(n+4k)!}{(n+3k)!}(\frac{[f(n+4k)]!}{[f(n+3k)]!})^2\\q_n&=\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\end{aligned}$$

حالت اولیه میدان را حالت همدوس و حالت اولیه اتم‌ها را برهم‌نهی‌ای از حالت‌هایی که در آن هر دو اتم در حالت پایه ($|g\rangle$) و یا هر دو اتم در حالت برانگیخته ($|e\rangle$) باشد در نظر می‌گیریم:

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]

$$|\psi(t=0)\rangle=\sum_n q_n[\cos(\frac{\theta}{2})|n,e,e\rangle+\sin(\frac{\theta}{2})|n+4k,g,g\rangle] \quad (۴)$$

در صورتی که $\theta=0$ باشد حالت اولیه هر دو اتم حالت برانگیخته، در صورتی که $\theta=\pi$ باشد حالت اولیه هر دواتم حالت پایه و برای زاویه‌های دیگر برهم‌نهی‌ای از هر دو حالت را نتیجه می‌دهد.

با استفاده از هامیلتونی (۲)، تابع موج (۳) و حل معادله شرودینگر، معادلات زیر برای ضرایب بسط تابع موج به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} i\frac{dA_n}{dt}&=2FB_{n+2k}e^{-i\eta t}\\ i\frac{dB_{n+2k}}{dt}&=FA_ne^{i\eta t}+GC_{n+4k}e^{-i\varsigma t}\\ i\frac{dC_{n+4k}}{dt}&=2GB_{n+2k}e^{i\varsigma t}\end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن‌ها:

$$F=\frac{[f(n+2k)]!}{[f(n)]!}\sqrt{\frac{(n+2k)!}{n!}}\lambda,\quad G=\frac{[f(n+4k)]!}{[f(n+2k)]!}\sqrt{\frac{(n+4k)!}{(n+2k)!}}\lambda$$
$$\gamma_2(n)-\gamma_1(n)=\eta,\quad \gamma_3(n)-\gamma_2(n)=\varsigma$$

با حل معادلات دیفرانسیل جفت‌شده (۵)، بالاخره خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(t)&=\frac{1}{2FG}\sum_{m=1}^{3}\Omega_m[\mu_m^2-\varsigma\mu_m-2G^2]\times\\ &\quad\exp[i(\mu_m-\eta-\varsigma)t]\\ B_{n+2k}(t)&=\frac{-1}{2G}\sum_{m=1}^{3}\Omega_m\mu_m\exp[i(\mu_m-\varsigma)t]\\ C_{n+4k}(t)&=\sum_{m=1}^{3}\Omega_m\exp[i(\mu_m)t]\end{aligned} \quad (۶)$$

در روابط بالا قراردادهای زیر را اختیار کرده‌ایم:

$$\mu_m=-\frac{x_1}{3}+\frac{2}{3}(x_1^2-3x_2)^{1/2}\cos(\varphi+\frac{2\pi(m-1)}{3})$$
$$\varphi=\frac{1}{3}\cos^{-1}\left[\frac{9x_1x_2-2x_1^3-27x_3}{(x_1^2-3x_2)^{3/2}}\right]$$
$$x_1=-\eta-2\varsigma,\quad x_2=\varsigma(\varsigma+\eta)-2F^2-2G^2$$
$$x_3=2G^2(\eta+\varsigma),\quad \Omega_m=\frac{2G\Gamma+\mu_q\mu_r\sin(\varphi/2)}{\mu_{mq}\mu_{mr}}$$
$$\mu_{mq}=\mu_m-\mu_q,\qquad m\neq q\neq r=1,2,3$$
$$\Gamma=F\cos(\frac{\theta}{2})+G\sin(\frac{\theta}{2})$$

بدین‌ترتیب، شکل صریح و دقیق تابع موج سامانهٔ مورد مطالعه به طور تحلیلی به‌دست آمد. برای بررسی‌های بعدی کافی است شکل تابع جفت‌شدگی را تعیین کنیم. در ادامه این مقاله، به عنوان یک نمونه فیزیکی برای ساختار ارائه شده از تابع غیرخطی $f(n)=\sqrt{n}$ استفاده می‌کنیم. این تابع به طور طبیعی در هامیلتونی‌هایی که توصیف‌کننده برهم‌کنش یک اتم دوترازی با میدان تابشی و با جفت‌شدگی وابسته به‌شدت هستند ظاهر شده است [۴ و ۵].

۳- در هم‌تنیدگی

از بین معیارهای متفاوت اندازه‌گیری درجه درهم‌تنیدگی، برای محاسبه درهم‌تنیدگی، آنتروپی خطی را انتخاب می‌کنیم. آنتروپی بزرگ‌تر (کوچک‌تر) نشان‌دهنده درجه درهم‌تنیدگی بیشتر (کمتر) است. آنتروپی خطی با رابطه $S(t)=1-Tr(\hat{\rho}_{atom}^2)$ تعریف می‌شود [۶] که $\hat{\rho}_{atom}$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته اتمی است.

با استفاده از تابع موج سامانه (۳) ماتریس چگالی در هر لحظه از زمان به صورت $\hat{\rho}(t)=|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ به‌دست می‌آید. با ردگرفتن روی مؤلفه‌های میدان، ماتریس چگالی کاهش‌یافته اتم‌ها به شکل زیر خواهد بود

$$\hat{\rho}_{atoms}(t)=\begin{pmatrix}\rho_{11}(t)&\rho_{12}(t)&\rho_{12}(t)&\rho_{14}(t)\\ \rho_{21}(t)&\rho_{22}(t)&\rho_{22}(t)&\rho_{24}(t)\\ \rho_{21}(t)&\rho_{22}(t)&\rho_{22}(t)&\rho_{24}(t)\\ \rho_{41}(t)&\rho_{42}(t)&\rho_{42}(t)&\rho_{44}(t)\end{pmatrix} \quad (۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}|q_n|^2|A_n(t)|^2,\ \rho_{22}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}|q_n|^2|B_{n+2k}(t)|^2\\ \rho_{12}(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}q_{n+2k}q_n^*A_{n+2k}(t)B_{n+2k}^*(t)\\ \rho_{44}(t)&=\sum_{n=0}^{\infty}|q_n|^2|C_{n+4k}(t)|^2,\ldots\end{aligned} \quad (۸)$$

با استفاده از عناصر ماتریسی بالا آنتروپی خطی برای سامانه مورد نظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}S(t)=1-[&(\rho_{11}(t))^2+(\rho_{22}(t))^2+(\rho_{44}(t))^2\\&+4(\rho_{12}(t))^2+4(\rho_{24}(t))^2+2(\rho_{14}(t))^2]\end{aligned} \quad (۹)$$

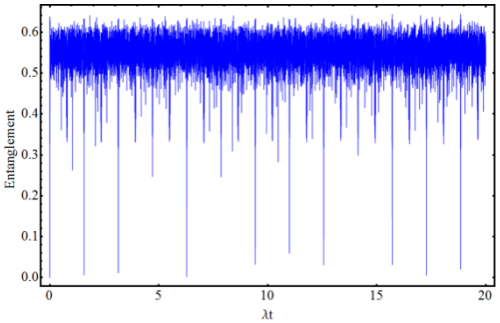
با محاسبه آنتروپی بالا می‌توان میزان درهم‌تنیدگی دو اتم را با میدان محاسبه و تأثیر اثر استارک، اثر کر، پارامتر

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]

نامیزانی و جفت‌شدگی وابسته به شدت را بر روی آن مورد بررسی قرار داد.

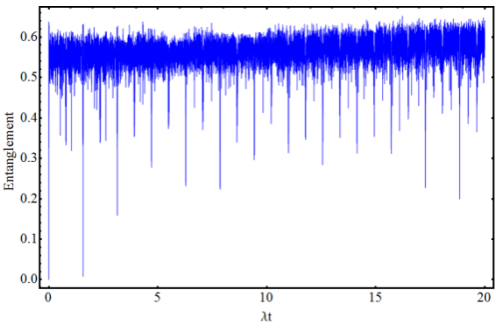
۴- بحث و نتیجه‌گیری

نمودارهای (۱) تا (۴) تغییرات زمانی آنتروپی خطی (درهم‌تنیدگی) را برای حالتی که اتم‌ها در ابتدا در حالت برانگیخته و میدان در حالت همدوس باشد نشان می‌دهند. نمودار (۱) با فرض صفر بودن پارامتر نامیزانی، در غیاب اثرهای کر و استارک و برای گذارهای دو فوتونی رسم شده است. همان‌طور که مشخص است در این حالت آنتروپی سریعاً به نقطه بیشینه رسیده و بعد از آن یک رفتار نامنظم دارد. صرف‌نظر از برخی بازه‌های زمانی بسیار کوتاه، در اکثر زمان‌ها درهم‌تنیدگی در حوالی بیشینه قرار دارد.



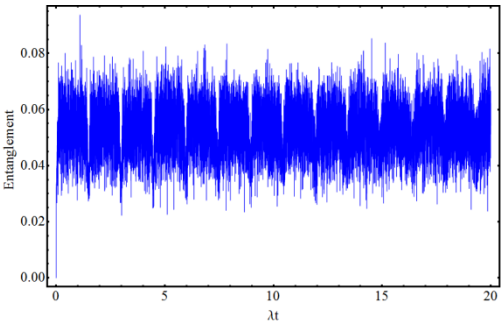
شکل (۱) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای

$k=1, \chi=0, \Delta=0, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=5, \theta=0$.



شکل (۲) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای بررسی پارامتر نامیزانی

$k=1, \chi=0, \Delta=5, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=5, \theta=0$.



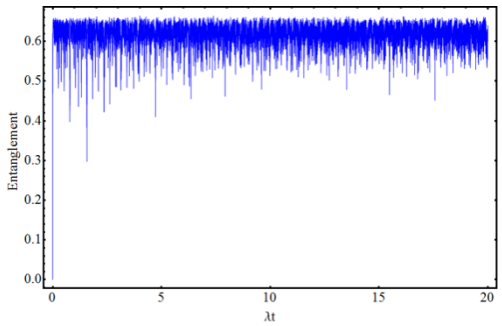
شکل (۳) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای بررسی اثر کر

$k=1, \chi=0.06, \Delta=0, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=5, \theta=0$.

شکل (۲) تأثیر پارامتر نامیزانی بر روی درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد. با مقایسه این شکل و شکل (۱) پیداست که پارامتر نامیزانی تا حدودی کمینه‌های آنتروپی خطی (نسبت به شکل (۱) که کمینه‌های بیشتری نزدیک به صفر داشتند) را افزایش می‌دهد ولی تأثیری بر مقدار بیشینه ندارد. شکل (۳) برای بررسی تأثیر اثر کر بر درجه درهم‌تنیدگی رسم شده‌است. نمودار نشان می‌دهد که اثر کر بیشینه درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

شکل (۴) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای بررسی اثر استارک

$k=1, \chi=0, \Delta=0, \beta_1=\beta_2=2, \alpha=5, \theta=0$.



در شکل (۴) تأثیر اثر استارک در غیاب اثر کر و نامیزانی بررسی شده است. با توجه به این شکل، اثر استارک تأثیر مثبتی در میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان دارد، زیرا در حضور این اثر، آنتروپی بین نقاط بیشینه و کمینه با دامنه محدودتری نوسان می‌کند، به عبارت دیگر همواره درهم‌تنیدگی قابل ملاحظه‌ای بین دو اتم و میدان وجود دارد. بر اساس محاسبات انجام شده که در اینجا آورده نشده است، در صورتی که اثرهای کر، استارک و پارامتر نامیزانی را به‌طور همزمان بررسی نماییم، به این نتیجه می‌رسیم که اثر کاهنده کر روی میزان آنتروپی اثر غالب است.

مراجع:

[۱] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[۲] E.T. Jaynes, F. W. Cummings, **Proc. IEEE.**51 (1963) 89.

[۳] N. H. Abdel-Wahab, M. F. Mourad**, Phys. Scr.** 84 (2011) 015401.

[۴] S. Singh**, Phys. Rev. A** 25 (1982) 3206.

[۵] J. M. Fink and et al, **Nature** 454 (2008) 315.

[۶] R. M. Angelo and *et al*, **Phys. Rev. A** 64 (2001) 043801.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02]