



چلانگی و آمار کوانتومی در برهم‌کنش غیرخطی دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد

حمیدرضا باغشاهی^{۱،۳}، محمد کاظم توسلی^{۱،۲} و عباس بهجت^{۱،۳}

^۱گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^۲گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

^۳گروه فیزیک، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده - در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را در نظر گرفته‌ایم. نشان خواهیم داد که این مسئله هنوز دارای جواب‌های تحلیلی است. در واقع ابتدا شکل صریح تابع موج سامانه اتم-میدان را با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم. سپس با تجزیه و تحلیل عددی چلانگی و آمار کوانتومی به عنوان ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه، غیرکلاسیکی بودن جواب‌ها را به روشنی تبیین خواهیم کرد. همچنین تأثیر جفت‌شدگی وابسته به شدت بر روی معیارهای ذکر شده مورد بحث قرار می‌گیرد.

کلیدواژه - مدل جینز-کامینگز، تبدیل لاپلاس، جفت‌شدگی وابسته به شدت.

Squeezing and Quantum Statistics in the Nonlinear Interaction of two Ξ – Type Three-Level Atoms with Single-Mode Cavity Field

HamidReza Baghshahi^{1,3}, Mohammad Kazem Tavassoly^{1,2} and Abbas Behjat^{1,2}

¹Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

²Photonics Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

³Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract- In this paper we consider the nonlinear interaction between two Ξ -type three-level atoms with a single-mode cavity field. We demonstrate that the outlined problem has still analytical solution. Indeed, after obtaining the explicit form of the atom-field wave function by using the Laplace transform technique, squeezing and quantum statistics as some nonclassical features of the system are clearly established. The effect of intensity-dependent coupling on the temporal behavior of the above mentioned criteria are also discussed.

Keywords: Jaynes-Cummings model, Laplace transform, Intensity-dependent coupling.

۱- مقدمه

$$\hat{H}_0 = \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=A,B} (\omega_1 |1^{(j)}\rangle \langle 1^{(j)}| + \omega_2 |2^{(j)}\rangle \langle 2^{(j)}| + \omega_3 |3^{(j)}\rangle \langle 3^{(j)}|)$$

همیلتونی مربوط به اتم و میدان آزاد، و

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=A,B} g(\hat{\sigma}_{12}^{(j)} \hat{A} + \hat{\sigma}_{21}^{(j)} \hat{A}^\dagger) + g(\hat{\sigma}_{23}^{(j)} \hat{A} + \hat{\sigma}_{32}^{(j)} \hat{A}^\dagger)$$

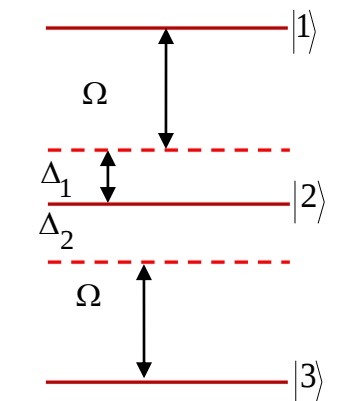
همیلتونی مربوط به برهم کنش اتم-میدان هستند. در اینجا $\hat{\sigma}_{ik} = |i\rangle \langle k|$ عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده اتمی، Ω بسامد میدان، $\omega_i (i=1,2,3)$ بسامدهای گذار اتمی، برچسب‌های j شمارنده اتم‌های A و B هستند و $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش تغییر شکل‌یافته‌ی $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $\hat{A}^\dagger = f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger$ هستند که در آنها $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. با استفاده از (۱) و (۲) همیلتونی در تصویر برهم کنش به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=A,B} g(\hat{\sigma}_{12}^{(j)} \hat{A} e^{i\Delta_1 t} + \hat{\sigma}_{21}^{(j)} \hat{A}^\dagger e^{-i\Delta_1 t}) + g(\hat{\sigma}_{23}^{(j)} \hat{A} e^{i\Delta_2 t} + \hat{\sigma}_{32}^{(j)} \hat{A}^\dagger e^{-i\Delta_2 t})$$

پارامترهای $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_3 - \Omega$ و $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_2 - \Omega$ نامیزانی هستند. تابع موج سامانه را به صورت

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_1(n,t) |1,1,n\rangle + C_2(n,t) (|1,2,n\rangle + |2,1,n\rangle) + C_3(n,t) (|1,3,n\rangle + |3,1,n\rangle) + C_4(n,t) (|2,3,n\rangle + |3,2,n\rangle) + C_5(n,t) |2,2,n\rangle + C_6(n,t) |3,3,n\rangle]$$

و حالت اولیه اتم‌ها را برانگیخته و حالت اولیه میدان را همدوس در نظر می‌گیریم، بنابراین



شکل ۱: ترازهای انرژی اتم سه‌ترازی نوع Ξ .

مدل جینز-کامینگز یک مدل کاملاً کوانتومی و حل‌پذیر برای بررسی برهم کنش اتم و میدان است که برهم کنش یک اتم دو‌ترازی با یک میدان تک‌مد با در نظر گرفتن تقریب موج چرخان را به‌خوبی توصیف می‌کند [۱]. در سال‌های اخیر به این مدل تعمیم‌های متفاوتی داده شده است. برهم کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت در حضور محیط کر در [۲] انجام شده است. در سال ۲۰۰۹ درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان در برهم کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Ξ با میدان دومی در حضور محیط کر و با جفت‌شدگی وابسته به شدت در [۳] مورد بررسی قرار گرفته است. هرچند بررسی برهم کنش دو اتم دو‌ترازی با میدان‌های مختلف و تحت شرایط متفاوت در سال‌های اخیر توسط بسیاری از محققین انجام شده است [۴] ولی برهم کنش دو اتم سه‌ترازی با توجه به پیچیدگی معادلات به‌دست آمده مورد توجه قرار نگرفته است. اتم‌های سه‌ترازی دارای انواع متفاوتی از قبیل Ξ ، V و Λ هستند. در این مقاله برهم کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را مورد بررسی قرار می‌دهیم. علیرغم پیچیدگی معادلات به دست آمده با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس، تابع موج صریح اتم-میدان را محاسبه و با استفاده از آن، برخی ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه، از جمله چلانگی و آمار کوانتومی (پارامتر مندل و میانگین تعداد فوتون‌های میدان) را محاسبه و تأثیر جفت‌شدگی وابسته به شدت را بر روی آنها مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲- محاسبه تابع موج سامانه

همیلتونی دو اتم سه‌ترازی یکسان نوع Ξ با تراز برانگیخته $|1\rangle$ ، تراز پایه $|3\rangle$ و تراز میانی $|2\rangle$ (شکل ۱) با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را به صورت $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ در نظر می‌گیریم، به طوری که:

$$C_3(n+2, t) = \frac{C_1(n, 0)}{x_{2n}\eta_n} [(\beta_{1n}^2 x_{5n} - V_{1n} V_{2n} x_{2n}) \cos(\beta_{2n} t) - (\beta_{2n}^2 x_{5n} - V_{1n} V_{2n} x_{2n}) \cos(\beta_{1n} t) - x_{5n} \eta_n] \quad (9)$$

$$C_4(n+3, t) = \frac{i x_{1n} C_1(n, 0)}{2 V_{4n} \eta_n} \left(\frac{\sin \beta_{1n}}{\beta_{1n}} - \frac{\sin \beta_{2n}}{\beta_{2n}} \right) \quad (10)$$

$$C_5(n+2, t) = \frac{2 C_1(n, 0)}{x_{2n} \eta_n} [(\beta_{1n}^2 x_{5n} - V_{1n} V_{2n} x_{2n}) \cos(\beta_{2n} t) - (\beta_{2n}^2 x_{5n} - V_{1n} V_{2n} x_{2n}) \cos(\beta_{1n} t) - x_{5n} \eta_n] \quad (11)$$

$$C_6(n+4, t) = \frac{x_{1n} C_1(n, 0)}{x_{2n} \eta_n} [(\beta_{2n}^2 \cos(\beta_{1n} t) - \beta_{1n}^2 x_{5n} \cos(\beta_{2n} t) + \eta_n)] \quad (12)$$

که در آن‌ها قراردادهای زیر را اختیار کرده‌ایم:

$$\begin{aligned} x_{1n} &= 6V_{1n}V_{2n}V_{3n}V_{4n}, x_{2n} = 6V_{1n}^2V_{3n}^2 + 4V_{1n}^2V_{4n}^2 + 6V_{2n}^2V_{4n}^2 \\ x_{3n} &= 2(V_{1n}^2 + V_{4n}^2) + 3(V_{2n}^2 + 2V_{3n}^2) \\ x_{4n} &= 6V_{1n}^2V_{3n}^2 + 4V_{1n}^2V_{4n}^2, x_{5n} = 2V_{1n}V_{2n}V_{4n}^2 \\ \eta_n &= \sqrt{x_{3n}^2 - 4x_{2n}}, \beta_{1n} = \sqrt{\frac{x_{3n} + \eta_n}{2}}, \beta_{2n} = \sqrt{\frac{x_{3n} - \eta_n}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به معادلات (۷) تا (۱۲) تابع موج سامانه در هر لحظه از زمان به صورت صریح به دست آمده است. با داشتن تابع موج، می‌توان به بررسی برخی از ویژگی‌های فیزیکی سامانه پرداخت. به عنوان یک نمونه فیزیکی برای ساختار ارائه شده، به منظور محاسبه ویژگی‌های فیزیکی سامانه مورد نظر در برهم‌کنش اتم-میدان در رژیم وابسته به شدت از تابع غیرخطی $f(n) = \frac{L_n^1(\eta^2)}{(n+1)L_n^0(\eta^2)}$ استفاده می‌کنیم [۵]، که در آن η ($\eta < 1$) پارامتر لمب-دیک و $I_n^m(x)$ چندجمله‌ای‌های لاگر هستند. طبق نظریه حالت‌های همدوس غیرخطی، این تابع، توصیف‌کننده حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده است.

۳- ویژگی‌های غیرکلاسیکی

۳-۱ چلاندگی:

نور چلاند یک میدان تابشی بدون هیچ مشابه کلاسیکی است. برای بررسی ویژگی‌های چلاندگی حالت به دست آمده در (۴)، کوادراتورهای هرمیتی $\hat{x} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2$ و $\hat{y} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i$ را تعریف می‌کنیم. این دو عملگر با توجه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در رابطه $(\Delta \hat{x})^2 (\Delta \hat{y})^2 \geq \frac{1}{16}$ صدق می‌کنند، بنابراین با تعریف

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n C_1(n, 0) |1, 1, n\rangle \quad (5)$$

$$C_1(n, 0) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (6)$$

با حل معادله شرودینگر در تصویر برهم‌کنش با استفاده از (۳) و (۴)، معادلات زیر برای دامنه‌های احتمال به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1(n, t)}{dt} &= -2iV_{1n}e^{i\Delta_1 t} C_2(n+1, t) \\ \frac{dC_2(n+1, t)}{dt} &= -iV_{1n}e^{-i\Delta_1 t} C_1(n, t) - iV_{2n}e^{i\Delta_2 t} C_3(n+2, t) \\ &\quad - iV_{2n}e^{i\Delta_1 t} C_5(n+2, t) \\ \frac{dC_3(n+2, t)}{dt} &= -iV_{2n}e^{-i\Delta_2 t} C_2(n+1, t) - iV_{3n}e^{i\Delta_1 t} C_4(n+3, t) \\ \frac{dC_4(n+3, t)}{dt} &= -iV_{3n}e^{-i\Delta_1 t} C_3(n+2, t) - iV_{3n}e^{-i\Delta_2 t} C_5(n+2, t) \\ &\quad - iV_{4n}e^{i\Delta_2 t} C_6(n+4, t) \\ \frac{dC_5(n+2, t)}{dt} &= -2iV_{2n}e^{-i\Delta_1 t} C_2(n+1, t) - 2iV_{3n}e^{i\Delta_2 t} C_4(n+3, t) \\ \frac{dC_6(n+4, t)}{dt} &= -2iV_{4n}e^{-i\Delta_2 t} C_4(n+3, t) \end{aligned}$$

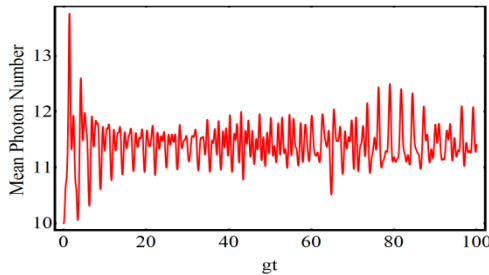
که در آنها $V_{jn} = f(n+j)\sqrt{n+j}$, ($j=1, 2, 3, 4$)

از آنجا که روش‌های متعارف در این نوع برهم‌کنش‌ها مفید واقع نشد، مجبور شدیم از روش تبدیلات لاپلاس استفاده کنیم. بدین‌منظور شرایط تشدید $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ از روابط موجود در معادله (۶) تبدیل لاپلاس گرفته، که در نتیجه آن، معادلات دیفرانسیل جفت‌شده بالا به معادلات جفت‌شده بر حسب $\tilde{C}_i(n, z)$ ها $\tilde{C}_i(n, z)$ تبدیل لاپلاس $C_i(n, t)$ ها هستند) تبدیل می‌شوند. این ضرایب را به دست آورده و بعد، از $\tilde{C}_i(n, z)$ ها تبدیل معکوس لاپلاس می‌گیریم و در نهایت دامنه‌های احتمال به صورت تابعی از زمان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} C_1(n, t) &= \frac{C_1(n, 0)}{x_{2n}\eta_n} [(2V_{1n}^2 x_{2n} - \beta_{2n}^2 x_{4n}) \cos(\beta_{1n} t) - (2V_{1n}^2 x_{2n} - \beta_{1n}^2 x_{4n}) \cos(\beta_{2n} t) + (x_{2n} - x_{4n}) \eta_n] \\ C_2(n+1, t) &= \frac{i C_1(n, 0)}{2\beta_{1n}\beta_{2n}\eta_n} [(x_{4n} - 2\beta_{1n}^2) \beta_{2n} \sin(\beta_{1n} t) - (x_{4n} - 2\beta_{2n}^2) \beta_{1n} \sin(\beta_{2n} t)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$(8)$$

شکل ۳ تغییرات زمانی پارامتر مندل را با پارامترهای مشابه شکل ۲ نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود پارامتر مندل بین نقاط منفی و مثبت تغییر می‌کند که این نشان‌دهنده وقوع آمار زیرپواسونی و ابرپواسونی برای آمار توزیع فوتون‌ها در بازه‌های زمانی متفاوت است. میانگین تعداد فوتون‌های میدان، یکی دیگر از پارامترهایی است که می‌تواند توزیع آماری فوتون‌های میدان را نشان دهد.



شکل ۴: تغییرات زمانی توزیع میانگین فوتون‌ها با $|\alpha|^2 = 10$.

شکل ۴ تغییرات زمانی میانگین تعداد فوتون‌های میدان را نشان می‌دهد، با توجه به شکل، تعداد فوتون‌های میدان از مقدار اولیه میانگین تعداد فوتون‌ها $|\alpha|^2 = 10$ شروع و بعد از آن نوسان‌های نامنظمی دارد.

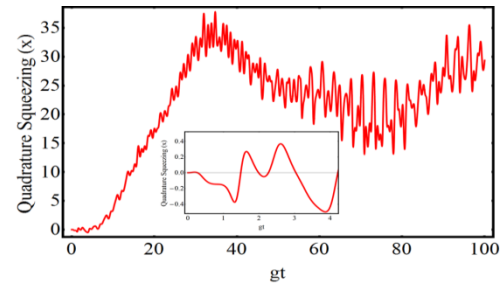
۴- نتایج

در این مقاله با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس، تابع موج صریح سامانه را برای برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی با یک میدان تک‌مد به‌دست آوردیم. در ادامه با در نظر گرفتن تابع غیرخطی توصیف‌کننده حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده برخی از ویژگی‌های فیزیکی سامانه از جمله آمار فوتونی و چلانگی مرتبه اول را مورد مطالعه قرار دادیم. با تجزیه و تحلیل محاسبات عددی رفتار غیرکلاسیکی سامانه به‌دست آمده به روشنی تبیین شد. بدیهی است که می‌توان با در نظر گرفتن توابع غیرخطی گوناگون به نتایج فیزیکی متفاوتی هم دست یافت.

مراجع

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, 51(1963) 89.
- [2] M. J. Faghghi, M. K. Tavassoly, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 45 (2012) 035502.
- [3] A. S-F. Obada, A. A. Eied, *Opt. Commun.* 282 (2009) 2184.
- [4] Y. Q. Guo and et al, *Int. J. Theor. Phys.* 45 (2006) 2247.
- [5] R. L. de Mateos Filho, W. Vogel, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 1661.
- [6] D. F. Walls, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 47(1981) 709.
- [7] L. Mandel, *Opt. Lett.* 4 (1979) 205.
- [8] S. Singh, O. Raymond and C. H. Amrita, *Phys. Rev. A* 86 (2012) 023810.

چلانگی در $\hat{x}$ ($\hat{y}$) داریم که $-1 < S_x < 0$ و $-1 < S_y < 0$ [۶].



شکل ۲: تغییرات زمانی چلانگی مؤلفه $\hat{x}$ برای $|\alpha|^2 = 10$.

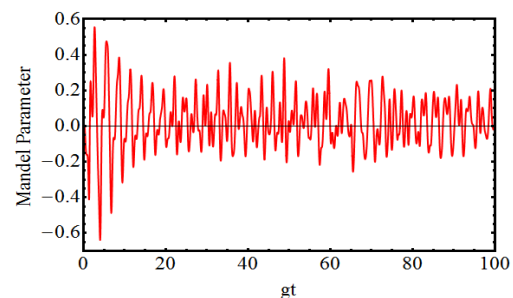
شکل ۲ تغییرات زمانی چلانگی را برای حالتی که در لحظه اولیه دو اتم در حالت برانگیخته و میدان در حالت همدوس با $|\alpha|^2 = 10$ باشد، را برای تابع غیرخطی مرکز جرم یون به دام افتاده نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است چلانگی فقط در لحظات اولیه برهم‌کنش اتم-میدان وجود دارد و بعد از آن هیچ‌گونه چلانگی در کوادراتور $\hat{x}$ نداریم. بر اساس محاسبات انجام شده چلانگی در مؤلفه $\hat{y}$ نیز در هیچ زمانی رخ نمی‌دهد.

۳-۲ آمار کوانتومی:

به‌منظور بررسی آمار کوانتومی میدان، دو پارامتر را مورد بحث قرار می‌دهیم: یکی پارامتر مندل [۷] و دیگری میانگین تعداد فوتون‌های میدان [۸]. پارامتر مندل برای میدان‌های تابشی تک‌مد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} - 1 \quad (14)$$

$Q = 0$ ، $Q < 0$ و $Q > 0$ به‌ترتیب متناظر با توزیع پواسونی، زیرپواسونی و ابرپواسونی برای فوتون‌های میدان هستند. آمار زیرپواسونی، یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه است.



شکل ۳: تغییرات زمانی پارامتر مندل با $|\alpha|^2 = 10$.