بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

چلاندگی و آمار کوانتومی در برهم‌کنش غیرخطی دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد

حمیدرضا باغشاهی[۱و۳]، محمد کاظم توسلی[۱و۲] و عباس بهجت [۱و۲]

[۱]گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

[۲]گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

[۳]گروه فیزیک، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده – در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را در نظر گرفته‌ایم. نشان خواهیم داد که این مسئله هنوز دارای جواب‌های تحلیلی است. در واقع ابتدا شکل صریح تابع موج سامانه اتم-میدان را با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس به دست می‌آوریم. سپس با تجزیه و تحلیل عددی چلاندگی و آمار کوانتومی به عنوان ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه، غیرکلاسیکی بودن جواب‌ها را به روشنی تبیین خواهیم کرد. هم‌چنین تأثیر جفت‌شدگی وابسته به شدت بر روی معیارهای ذکرشده مورد بحث قرارمی‌گیرد.

کلید واژه- مدل جینز-کامینگز، تبدیل لاپلاس، جفت‌شدگی وابسته به شدت.

Squeezing and Quantum Statistics in the Nonlinear Interaction of twoΞ – Type Three-Level Atoms with Single-Mode Cavity Field

HamidReza Baghshahi[1,3], Mohammad Kazem Tavassoly[1,2] and Abbas Behjat[1,2]

[1]Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

[2]Photonics Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

[3]Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract-In this paper we consider the nonlinear interaction between two Ξ-type three–level atoms with a single-mode cavity field. We demonstrate that the outlined problem has still analytical solution. Indeed, after obtaining the explicit form of the atom-field wave function by using the Laplace transform technique, squeezing and quantum statistics as some nonclassical features of the system are clearly established. The effect of intensity-dependent coupling on the temporal behavior of the above mentioned criteria are also discussed.

Keywords: Jaynes-Cummings model, Laplace transform, Intensity-dependent coupling.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

۱- مقدمه

مدل جینز-کامینگز یک مدل کاملاً کوانتومی و حل‌پذیر برای بررسی برهم‌کنش اتم و میدان است که برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان تک‌مد با در نظرگرفتن تقریب موج چرخان را به‌خوبی توصیف می‌کند [۱]. در سال‌های اخیر به این مدل تعمیم‌های متفاوتی داده شده است. برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک میدان تک‌مد باجفت‌شدگی وابسته به شدت در حضور محیط کر در [۲] انجام شده است. در سال ۲۰۰۹ درهم‌تنیدگی بین اتم و میدان در برهم‌کنش یک اتم سه‌ترازی نوع Ξ با میدان دومدی در حضور محیط کر و با جفت‌شدگی وابسته به شدت در [۳] مورد بررسی قرار گرفته است. هرچند بررسی برهم‌کنش دو اتم دوترازی با میدان‌های مختلف و تحت شرایط متفاوت در سال‌های اخیر توسط بسیاری از محققین انجام شده است [٤] ولی برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی با توجه به پیچیدگی معادلات به‌دست آمده مورد توجه قرار نگرفته است. اتم‌های سه‌ترازی دارای انواع متفاوتی از قبیل Ξ، V و Λ هستند. در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. علیرغم پیچیدگی معادلات به دست آمده با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس، تابع موج صریح اتم-میدان را محاسبه و با استفاده از آن، برخی ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه، از جمله چلاندگی و آمار کوانتومی (پارامتر مندل و میانگین تعداد فوتون‌های میدان) را محاسبه و تأثیر جفت‌شدگی وابسته به شدت را بر روی آنها مورد مطالعه قرارمی‌دهیم.

۲- محاسبه تابع موج سامانه

هامیلتونی دو اتم سه‌ترازی یکسان نوع Ξ با تراز برانگیخته $|1\rangle$، تراز پایه $|3\rangle$ و تراز میانی $|2\rangle$ (شکل ۱) با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را به صورت $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1$ در نظر می‌گیریم، به طوری که:

(۱)

$$\hat{H}_0=\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}+\sum_{j=A,B}(\omega_1\left|1^{(j)}\right\rangle\left\langle 1^{(j)}\right|+\omega_2\left|2^{(j)}\right\rangle\left\langle 2^{(j)}\right|+\omega_3\left|3^{(j)}\right\rangle\left\langle 3^{(j)}\right|)$$

هامیلتونی مربوط به اتم و میدان آزاد، و

(۲)

$$\hat{H}_1=\sum_{j=A,B}g(\hat{\sigma}_{12}^{(j)}\hat{A}+\hat{\sigma}_{21}^{(j)}\hat{A}^\dagger)+g(\hat{\sigma}_{23}^{(j)}\hat{A}+\hat{\sigma}_{32}^{(j)}\hat{A}^\dagger)$$

هامیلتونی مربوط به برهم‌کنش اتم-میدان هستند. در اینجا $\hat{\sigma}_{ik}=|i\rangle\langle k|$ عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده اتمی، Ω بسامد میدان، $\omega_i(i=1,2,3)$ بسامدهای گذار اتمی، برچسب‌های j شمارندهٔ اتم‌های A و B هستند و $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش تغییر شکل‌یافته‌ی $\hat{A}=\hat{a}\,f(\hat{n})$ و $\hat{A}^\dagger=f(\hat{n})\hat{a}^\dagger$ هستند که در آنها $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. با استفاده از (۱) و (۲) هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر خواهد بود

(۳)

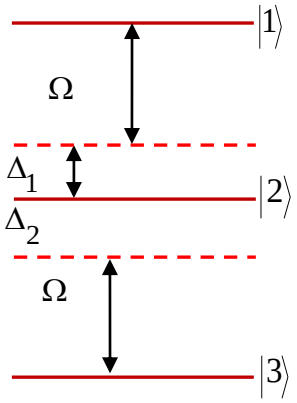
$$\hat{H}_1=\sum_{j=A,B}g(\hat{\sigma}_{12}^{(j)}\hat{A}e^{i\Delta_1 t}+\hat{\sigma}_{21}^{(j)}\hat{A}^\dagger e^{-i\Delta_1 t})+g(\hat{\sigma}_{23}^{(j)}\hat{A}e^{i\Delta_2 t}+\hat{\sigma}_{32}^{(j)}\hat{A}^\dagger e^{-i\Delta_2 t})$$

$\Delta_1=\omega_1-\omega_2-\Omega$ و $\Delta_2=\omega_2-\omega_3-\Omega$ پارامترهای نامیزانی هستند. تابع موج سامانه را به صورت

(۴)

$$|\psi(t)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}[C_1(n,t)|1,1,n\rangle+C_2(n,t)(|1,2,n\rangle+|2,1,n\rangle)+C_3(n,t)(|1,3,n\rangle+|3,1,n\rangle)+C_4(n,t)(|2,3,n\rangle+|3,2,n\rangle)+C_5(n,t)|2,2,n\rangle+C_6(n,t)|3,3,n\rangle]$$

و حالت اولیه اتم‌ها را برانگیخته و حالت اولیه میدان را همدوس در نظر می‌گیریم، بنابراین



شکل ۱: ترازهای انرژی اتم سه‌ترازی نوع Ξ.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

$$|\Psi(t=0)\rangle=\sum_n C_1(n,0)|1,1,n\rangle$$
$$C_1(n,0)=\exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (۵)$$

با حل معادله شرودینگر در تصویر برهم‌کنش با استفاده از (۳) و (۴)، معادلات زیر برای دامنه‌های احتمال به دست می‌آیند:

(۶)

$$\frac{dC_1(n,t)}{dt}=-2iV_{1n}e^{i\Delta_1 t}C_2(n+1,t)$$
$$\frac{dC_2(n+1,t)}{dt}=-iV_{1n}e^{-i\Delta_1 t}C_1(n,t)-iV_{2n}e^{i\Delta_2 t}C_3(n+2,t)$$
$$-iV_{2n}e^{i\Delta_1 t}C_5(n+2,t)$$
$$\frac{dC_3(n+2,t)}{dt}=-iV_{2n}e^{-i\Delta_2 t}C_2(n+1,t)-iV_{3n}e^{i\Delta_1 t}C_4(n+3,t)$$
$$\frac{dC_4(n+3,t)}{dt}=-iV_{3n}e^{-i\Delta_1 t}C_3(n+2,t)-iV_{3n}e^{-i\Delta_2 t}C_5(n+2,t)$$
$$-iV_{4n}e^{i\Delta_2 t}C_6(n+4,t)$$
$$\frac{dC_5(n+2,t)}{dt}=-2iV_{2n}e^{-i\Delta_1 t}C_2(n+1,t)-2iV_{3n}e^{i\Delta_2 t}C_4(n+3,t)$$
$$\frac{dC_6(n+4,t)}{dt}=-2iV_{4n}e^{-i\Delta_2 t}C_4(n+3,t)$$

که در آنها $V_{jn}=f(n+j)\sqrt{n+j},(j=1,2,3,4)$.

از آنجا که روش‌های متعارف در این نوع برهم‌کنش‌ها مفید واقع نشد، مجبور شدیم از روش تبدیلات لاپلاس استفاده کنیم. بدین‌منظوردر شرایط تشدید $\Delta_1=\Delta_2=0$ از روابط موجود در معادله (۶) تبدیل لاپلاس گرفته، که در نتیجه آن، معادلات دیفرانسیل جفت‌شده بالا به معادلات جفت‌شده بر حسب $\tilde{C}_i(n,z)$ها ($C_i(n,t)$ها تبدیلات لاپلاس هستند) تبدیل می‌شوند. این ضرایب را به‌دست آورده و بعد، از $\tilde{C}_i(n,z)$ها تبدیل معکوس لاپلاس می‌گیریم و در نهایت دامنه‌های احتمال به‌صورت تابعی از زمان به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_1(n,t)=\frac{C_1(n,0)}{x_{2n}\eta_n}[(2V_{1n}^2x_{2n}-\beta_{2n}^2x_{4n})\cos(\beta_{1n}t) \quad (۷)$$
$$-(2V_{1n}^2x_{2n}-\beta_{1n}^2x_{4n})\cos(\beta_{2n}t)+(x_{2n}-x_{4n})\eta_n]$$
$$C_2(n+1,t)=\frac{iC_1(n,0)}{2\beta_{1n}\beta_{2n}\eta_n}[(x_{4n}-2\beta_{1n}^2)\beta_{2n}\sin(\beta_{1n}t) \quad (۸)$$
$$-(x_{4n}-2\beta_{2n}^2)\beta_{1n}\sin(\beta_{2n}t)]$$
$$C_3(n+2,t)=\frac{C_1(n,0)}{x_{2n}\eta_n}[(\beta_{1n}^2x_{5n}-V_{1n}V_{2n}x_{2n})\cos(\beta_{2n}t) \quad (۹)$$
$$-(\beta_{2n}^2x_{5n}-V_{1n}V_{2n}x_{2n})\cos(\beta_{1n}t)-x_{5n}\eta_n]$$
$$C_4(n+3,t)=\frac{ix_{1n}C_1(n,0)}{2V_{4n}\eta_n}\left(\frac{\sin\beta_{1n}}{\beta_{1n}}-\frac{\sin\beta_{2n}}{\beta_{2n}}\right) \quad (۱۰)$$
$$C_5(n+2,t)=\frac{2C_1(n,0)}{x_{2n}\eta_n}[(\beta_{1n}^2x_{5n}-V_{1n}V_{2n}x_{2n})\cos(\beta_{2n}t) \quad (۱۱)$$
$$-(\beta_{2n}^2x_{5n}-V_{1n}V_{2n}x_{2n})\cos(\beta_{1n}t)-x_{5n}\eta_n]$$
$$C_6(n+4,t)=\frac{x_{1n}C_1(n,0)}{x_{2n}\eta_n}[(\beta_{2n}^2\cos(\beta_{1n}t)-\beta_{1n}^2x_{5n}\cos(\beta_{2n}t) \quad (۱۲)$$
$$+\eta_n]$$

که در آن‌ها قراردادهای زیر را اختیار کرده‌ایم:

$$x_{1n}=6V_{1n}V_{2n}V_{3n}V_{4n},x_{2n}=6V_{1n}^2V_{3n}^2+4V_{1n}^2V_{4n}^2+6V_{2n}^2V_{4n}^2$$
$$x_{3n}=2(V_{1n}^2+V_{4n}^2)+3(V_{2n}^2+2V_{3n}^2)$$
$$x_{4n}=6V_{1n}^2V_{3n}^2+4V_{1n}^2V_{4n}^2,x_{5n}=2V_{1n}V_{2n}V_{4n}^2$$
$$\eta_n=\sqrt{x_{3n}^2-4x_{2n}},\beta_{1n}=\sqrt{\frac{x_{3n}+\eta_n}{2}},\beta_{2n}=\sqrt{\frac{x_{3n}-\eta_n}{2}} \quad (۱۳)$$

با توجه به معادلات (۷) تا (۱۲) تابع موج سامانه در هر لحظه از زمان به صورت صریح به‌دست آمده است. با داشتن تابع موج، می‌توان به بررسی برخی از ویژگی‌های فیزیکی سامانه پرداخت. به عنوان یک نمونه فیزیکی برای ساختار ارائه شده، به‌منظور محاسبه ویژگی‌های فیزیکی سامانه مورد نظر در برهم‌کنش اتم-میدان در رژیم وابسته به‌شدت از تابع غیرخطی $f(n)=\frac{L_n^1(\eta^2)}{(n+1)L_n^0(\eta^2)}$ استفاده می‌کنیم [۵]، که در آن η ($\eta<1$) پارامتر لمب-دیک و $L_n^m(x)$ چندجمله‌ای‌های لاگر هستند. طبق نظریه حالت‌های همدوس غیرخطی، این تابع، توصیف‌کننده حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده است.

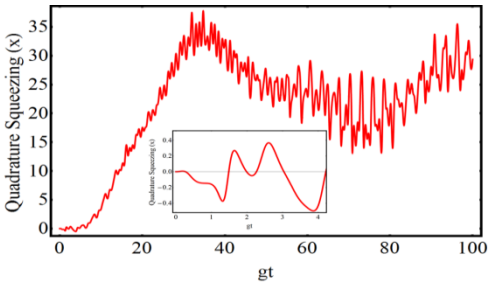
۳- ویژگی‌های غیرکلاسیکی

۳-۱ چلاندگی:

نور چلانده یک میدان تابشی بدون هیچ مشابه کلاسیکی است. برای بررسی ویژگی‌های چلاندگی حالت به‌دست آمده در (۴)، کوادراتورهای هرمیتی $\hat{x}=(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)/2$ و $\hat{y}=(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)/2i$ را تعریف می‌کنیم. این دو عملگر با توجه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در رابطه $(\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{y})^2\geq\frac{1}{16}$ صدق می‌کنند، بنابراین با تعریف

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

$S_x = 4(\Delta\hat{x})^2 - 1$ و $S_y = 4(\Delta\hat{y})^2 - 1$ در صورتی که چلاندگی در $\hat{x}$ ($\hat{y}$) داریم $-1 < S_x < 0$ ($-1 < S_y < 0$) [۶].



شکل ۲: تغییرات زمانی چلاندگی مؤلفه $\hat{x}$ برای $|\alpha|^2 = 10$.

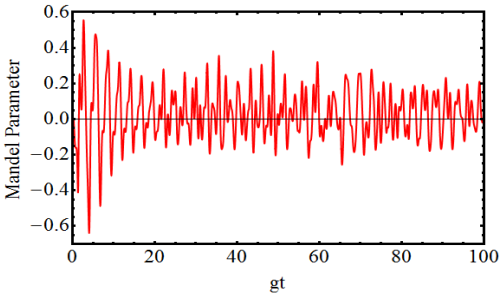
شکل ۲ تغییرات زمانی چلاندگی را برای حالتی که در لحظه اولیه دو اتم در حالت برانگیخته و میدان در حالت همدوس با $|\alpha|^2 = 10$ باشد، را برای تابع غیرخطی مرکزجرم یون به دام افتاده نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است چلاندگی فقط در لحظات اولیه برهم‌کنش اتم-میدان وجود دارد و بعد از آن هیچ‌گونه چلاندگی در کوادراتور $\hat{x}$ نداریم. بر اساس محاسبات انجام شده چلاندگی در مؤلفه $\hat{y}$ نیز در هیچ زمانی رخ نمی‌دهد.

۳-۲ آمار کوانتومی:

به‌منظور بررسی آمار کوانتومی میدان، دو پارامتر را مورد بحث قرار می‌دهیم: یکی پارامتر مندل[۷] و دیگری میانگین تعداد فوتون‌های میدان [۸]. پارامتر مندل برای میدان‌های تابشی تک‌مد به صورت زیر تعریف می‌شود:

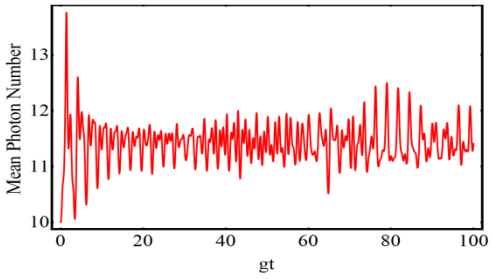
$$Q = \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} - 1 \qquad (۱۴)$$

$Q = 0$، $Q < 0$ و $Q > 0$ به‌ترتیب متناظر با توزیع پواسونی، زیرپواسونی و ابرپواسونی برای فوتون‌های میدان هستند. آمار زیرپواسونی، یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه است.



شکل ۳: تغییرات زمانی پارامتر مندل با $|\alpha|^2 = 10$.

شکل ۳ تغییرات زمانی پارامتر مندل را با پارامترهای مشابه شکل ۲ نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود پارامتر مندل بین نقاط منفی و مثبت تغییر می‌کند که این نشان‌دهنده وقوع آمار زیرپواسونی و ابرپواسونی برای آمار توزیع فوتون‌ها در بازه‌های زمانی متفاوت است. میانگین تعداد فوتون‌های میدان، یکی دیگر از پارامترهایی است که می‌تواند توزیع آماری فوتون‌های میدان را نشان دهد.



شکل ۴: تغییرات زمانی توزیع میانگین فوتون‌ها با $|\alpha|^2 = 10$.

شکل ۴ تغییرات زمانی میانگین تعداد فوتون‌های میدان را نشان می‌دهد، با توجه به شکل، تعداد فوتون‌های میدان از مقدار اولیه میانگین تعداد فوتون‌ها $|\alpha|^2 = 10$ شروع و بعد از آن نوسان‌های نامنظمی دارد.

۴- نتایج

در این مقاله با استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس، تابع موج صریح سامانه را برای برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی با یک میدان تک‌مد به‌دست آوردیم. در ادامه با در نظر گرفتن تابع غیرخطی توصیف‌کننده حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده برخی از ویژگی‌های فیزیکی سامانه از جمله آمار فوتونی و چلاندگی مرتبه اول را مورد مطالعه قرار دادیم. با تجزیه و تحلیل محاسبات عددی رفتار غیرکلاسیکی سامانه به‌دست آمده به روشنی تبیین شد. بدیهی است که می‌توان با در نظرگرفتن توابع غیرخطی گوناگون به نتایج فیزیکی متفاوتی هم دست یافت.

مراجع

[1] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, **Proc. IEEE**. 51(1963) 89.
[2] M. J. Faghihi, M. K. Tavassoly, **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** 45 (2012) 035502.
[3] A. S-F. Obada, A. A. Eied, **Opt. Commun**.282 (2009) 2184.
[4] Y. Q. Guo and et al, **Int. J. Theor. Phys.** 45 (2006) 2247.
[5] R. L. de Mateos Filho, W. Vogel, **Phys. Rev. A**58 (1998) 1661.
[6] D. F. Walls, P. Zoller, **Phys. Rev. Lett**. 47(1981) 709.
[7] L. Mandel, **Opt. Lett.**4 (1979) 205.
[8] S. Singh, O. Raymond and C. H. Amrita, **Phys. Rev. A** 86 (2012) 023810.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]