بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

اندازه گیری نیروی ضعیف در سیستم اپتومکانیکی

روح الله قبادی[۱] و مجتبی مظاهری[۲]

۱. انیستیتو اطلاعات کوانتومی، دانشگاه کلگری، آلبرتا، کانادا
۲. دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

چکیده – یکی از اهداف اصلی سیستم های اپتومکانیکی افزایش حساسیت اندازه گیری نیروهای ضعیف تا حد کوانتومی استاندارد است. ما اندازه گیری نیروی ضعیف را در سیستم اپتومکانیکی مطالعه کرده ایم. در شرایط سیستم پایدار، دینامیک سیستم به حالت پایا می رسد و در این حالت می توان با استفاده از ماتریس کوواریانس سیستم، نسبت سیگنال به نویز را به دست آورد. کوچکترین نیروی اندازه گیری شده یا بیشینه حساسیت دستگاه در ناحیه دوپایداری سیستم رخ می دهد. اثر نویز گرمایی بر روی میزان حساسیت سیستم در دماهای مختلف بررسی شده است. در این رهیافت از فرمالیسم ماتریس کواریانس استفاده می کنیم.

کلید واژه- اپتومکانیک، اندازه گیری نیرو، حد کوانتومی استاندارد

Weak force measurement in opto-mechanical system

Rohollah Ghobadi[1] and Mojtaba Mazaheri[2]

1.Institute for Quantum Information, University of Calgary, Alberta, Canada
2.Department of Science, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran

Abstract- One of the main milestones in the study of opto-mechanical system (OMS) is to increase the sensitivity of the measurement of weak forces up to the quantum limit. We have studied the detection of weak force by OMS. In the stable condition, the dynamics of the system behave asymptotically similar to stationary state in which the signal to noise ratio is obtained using covariance matrix. We have shown the maximum sensitivity is reached in the bistablility region. We also studied the destructive effects of thermal noise on the sensitivity of OMS. Our approach is based on the covariance matrix formalism.

Keywords: Opto-mechanics, force measurement, Standard quantum limit.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

۱- مقدمه

سیستم اپتومکانیکی برای اندازه گیری های دقیق مانند آشکارسازی امواج گرانشی و میکروسکوپ نیروی اتمی استفاده می شود. این سیستم بر پایه برهمکنش بین آینه متحرک (پروبی که نیروی ضعیف به آن وارد می شود) و میدان تابشی کار می کند [۱و۲]. نیروی مکانیکی اندازه مکان و تکانه مد نوسانی آینه را تغییر می دهد که در نتیجه باعث تغییر فاز موج اپتیکی بازتابی از آینه می شود. با اندازه گیری حساسیت فاز نور بازتابیده می توان نیرو را محاسبه کرد [۳].

حساسیت حسگر های اپتومکانیکی نیرو محدودیت هایی از قبیل نویز گرمایی وارد بر مد مکانیکی آینه، نویز کوانتومی مربوط به طبیعت کوانتومی نور، مانند افت و خیز فاز پرتو لیزر ورودی و نویز فشار تابشی، و افت وخیز کوانتومی مکان آینه دارد. حالت بهینه تعادل بین این نویز ها منجر به حد کوانتومی استاندارد برای حساسیت اندازه گیری می شود [۴]. این محدودیت ها برای حسگرهای دیگر نیز مانند حسگر نانوالکترومکانیکی و حسگر متصل به مدار ابررسانا وجود دارد و حساسیت اندازه گیری در آنها را مختل می کنند [۵].

مدلهای گوناگونی برای اندازه گیری نیروی های ضعیف با استفاده از کاواک اپتیکی با آینه متحرک ارایه شده است که در آنها حساسیت فاز متناسب با ضریب ظرافت کاواک است [۶]. مدل هایی هم ارایه شده است که حساسیت با استفاده از یک آینه متحرک و بدون کاواک انجام می شود. نور لیزر تکفام با بازتاب ازآینه به دو مد ارتعاشی استوکس و پاداستوکس تبدیل می شود [۷].

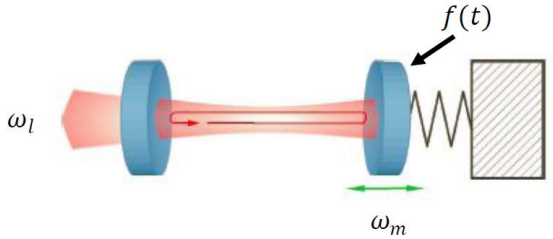
در مدلی که این مقاله ارایه می شود نویزهای گرمایی، نویز نور و نویز مکانیکی آینه در نظر گرفته می شود و با استفاده از شرایط حالت دوپایداری، حساسیت نیروی تا نزدیکی حد کوانتومی استاندارد محاسبه شود.

۲- مدل سازی هامیلتونی سیستم

سیستم اپتومکانیکی شامل کاواک فابری-پرو با یک آینه متحرک است که از آینه دیگر بسیار سبک تر است و می تواند تحت اثر فشار تابشی حرکت کند. حرکت آینه با برانگیختگی درجه های آزادی گواناگون با فرکانس های تشدید مختلف توصیف می شود. با استفاده از فیلتر آشکار سازی می توان تنها یک مد را در نظر گرفت و جفت شدگی مد-مد را در نظر نگرفت. بنابراین یک مد مکانیکی آینه را در نظر می گیریم که به صورت نوسانگر مکانیکی با فرکانس ω_m مدل سازی می شود. اگر نیروی خارجی به آینه متحرک یا نوسانگر مکانیکی اعمال شود باعث تغییر دینامیک سیستم می شود. هامیلتونی این سیستم در حالت تک مد به صورت زیر است [۸ و۹]

$$H = \hbar\omega_c a^+ a + \frac{\hbar\omega_m}{2}(q'^2 + p'^2) + i\hbar E\left(a^+ e^{-i\omega_l t} - a e^{i\omega_l t}\right) - \hbar G_\circ a^+ a q'(t) + \hbar\omega_m f(t) q \qquad (۱)$$

جمله اول مربوط به انرژی کاواک اپتیکی است و a و a^+ عملگر های فنا و خلق مد کاواک با فرکانس ω_c و آهنگ میرایی κ هستند. جمله دوم مربوط نوسانگر مکانیکی یا آینه متحرک است که q و p عملگرهای بدون بعد مکان و تکانه هستند. جمله سوم مربوط به واداشتگی لیزر با فرکانس ω_l و E وابسته به توان لیزر است. جمله چهارم جفت شدگی میدان تابشی و نوسانگر مکانیکی است و G_o ضریب زوج شدگی است. جمله آخر مربوط به نیروی خارجی است که f نیروی بدون بعد است و هدف این مقاله ارایه مدلی برای اندازه گیری آن است. این سیستم در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: سیستم کاواک اپتومکانیکی شامل کاواک فابری-پروت با آینه متحرک.

این یک سیستم کوانتومی باز است و شامل میرایی فوتونها و نویزهای براونی وارد بر آینه می شود. برای بررسی حالت پایا و وابسته به زمان سیستم، عملگر های

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

هایزنبرگی سیستم شامل دو بخش مستقل و وابسته به زمان است و همچنین جمله های وابسته به نویز را هم به آنها اضافه می کنیم که معادله های لانژوین کوانتومی به دست می آیند. معادله های خطی وابسته به زمان که دینامیک سیستم از حل آنها به دست می آید به صورت زیر هستند [۹]

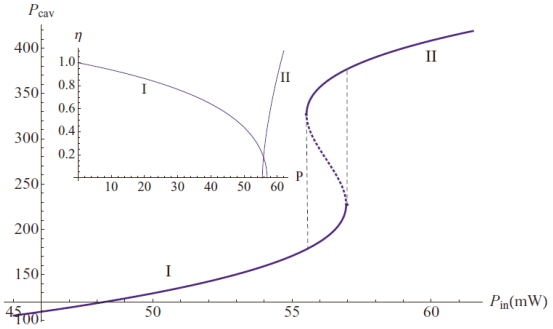
$$\begin{aligned}\delta\dot{q} &= \omega_m \delta p \\ \delta\dot{p} &= -\omega_m \delta q - \gamma_m \delta p + G\delta X + f(t) \\ &\quad + \xi(t) \\ \dot{X} &= -\kappa X + \Delta Y + \sqrt{2\kappa} X_{in} \\ \dot{Y} &= G\delta q - \Delta X - \kappa Y + \sqrt{2\kappa} Y_{in}\end{aligned} \qquad (۲)$$

دامنه میدان اپتیکی α_s حقیقی است و کوادراتورهای میدان اپتیکی کاواک X، Y هستند. سیستم در زمان طولانی به حالت پایا می رسد که مستقل از مقادیر اولیه است. زیرا نویزهای کوانتومی $\xi(t)$ و a_{in} نویزهای گاوسی کوانتومی با مقدار میانگین صفر هستند. این چهار معادله را می توان به صورت معادله حالت پایا لیاپونوف نوشت.

این معادله در صورتی پاسخ پایا دارد که ویژه مقادیر ماتریس ضرایب A منفی باشند. شرط لازم برای منفی بودن ویژه مقادیر ماتریس A توسط نامساوی‌های روث-هرویتز داده می شوند [۸]. سیستم در حالت واکوکی مثبت($\Delta > 0$) می تواند دو حالت پایدار داشته باشد. در فاصله بین این دو حالت پایدار یک حالت نیمه پایدار میانی وجود دارد که به آن حالت دوپایداری می گوییم. با استفاده از شرط ناپایداری روث-هرویتز، پارامتر دو پایداری را به صورت زیر تعریف نماییم

$$\eta = 1 - \frac{G^2\Delta}{\omega_m(\kappa^2 + \Delta^2)} \qquad (۳)$$

هرگاه پارامتر دوپایداری به صفر نزدیک شود سیستم می تواند به حالت پایدار دوم گذار نماید. حالت های پایدار سیستم و حالت میانی یا دوپایداری در شکل ۲ رسم شده است. با قرار دادن سیستم در این حالت دوپایداری سیستم حساسیت زیادی نسبت به تغییر پارامتر ها دارد.



شکل ۲: حالت های پایدار سیستم و حالت میانی دوپایداری. شکل میانی: پارامتر دوپایداری بر حسب دو حالت پایا در حالت I و حالت II [۱۰].

حال با اندازه گیری تغییر فاز میدان اپتیکی بر اثر اعمال نیروی خارجی می توانیم سیگنال را اندازه گیری کنیم. در این حالت سیگنال سیستم به صورت زیر به دست می آید:

$$\langle Y \rangle = \omega_m \int_0^\infty e^{-At'}{}_{42} f(t') dt' \qquad (۴)$$

این عبارت بیانگر تغییر فاز میدان الکترومغناطیسی درون کاواک اپتیکی به خاطر حضور نیروی $f(t)$ است. نسبت سیگنال به نویز در سیستم بزرگتر یا مساوی یک است

$$SNR = \frac{\langle Y \rangle}{\sqrt{\langle Y^2 \rangle}} \geq 1 \qquad (۵)$$

با استفاده از حل معادله لیپونوف، نویز را به دست می آوریم. در حالتی که نیروی خارجی ثابت به نوسانگر مکانیکی وارد می شود عبارت زیر برای حساسیت به دست می آید

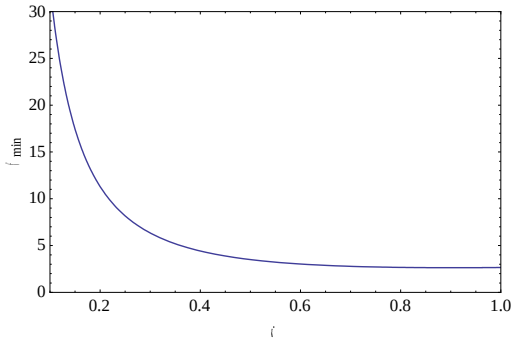
$$f_{min} = \frac{\sqrt{\langle Y^2 \rangle}}{\omega_m \int_0^\infty (e^{-At'})_{42} dt'} \qquad (۶)$$

پارامترهای سیستم حسگر اپتومکانیکی مورد نظر این مقاله به صورت زیر است: طول کاواک $L=1mm$، جرم آینه متحرک $m=5ng$، سرعت زاویه ای آینه $\omega_m = 2\pi \times 10^6 Hz$، $\gamma_m = 2\pi \times 10^2 Hz$ و کمیت هایی در هر بخش می توانند تغییر کنند. این سیستم به وسیله نور لیزر واداشته شده که توان ورودی لیزر $P=4mw$ و طول موج $\lambda = 810nm$ است.

کمینه نیروی اندازه گیری شده به پارامترهای سیستم

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

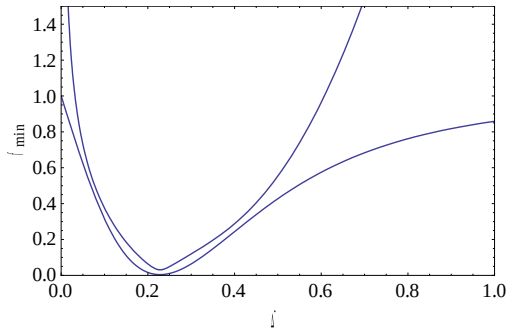
وابسته است. اگر جرم آینه یا نوسانگر مکانیکی کاهش یابد نیروی کمینه قابل اندازه گیری کاهش می یابد یا به عبارتی حساسیت زیاد می شود. با افزایش ضریب میرایی کاواک، حساسیت کاهش می یابد که در شکل ۳ دیده می شود.



شکل ۳: حساسیت بر حسب ضریب اتلاف کاواک.

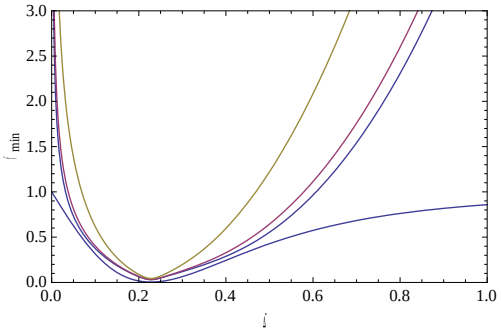
باقی ماندن تعداد زیاد فوتونها در سیستم باعث افزایش نیروی نویز وارد بر نوسانگر و افزایش نیروی کمینه قابل اندازه گیری می شود.

شکل ۴ حساسیت و پارامتر دو پایداری را بر حسب واکوکی نسبی ($\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\omega_m}$) نشان می دهد. مقدار بیشینه حساسیت متناظر با کمینه کمیت دو پایداری است. بنابراین بیشینه حساسیت حسگرهای اپتومکانیکی در ناحیه نزدیک به ناحیه دو پایداری روی می دهد.



شکل ۴: نمودار حساسیت (f_{min}) و پارامتر دو پایداری (η) بر حسب $\frac{\Delta}{\omega_m}$.

در شکل ۵ حساسیت سیستم در دماهای $0.4K$، $4K$ و $40K$ نشان داده شده اند که همه آنها در محدوده دوپایداری کمینه هستند و افزایش دمای سیستم، حساسیت را کاهش می دهد اما در عین حال این اثر در ناحیه دوپایداری کمتر از ناحیه های دیگر است.



شکل ۵: پارامتر دوپایداری و حساسیت در دماهای مختلف.

توانایی این حسگر برای اندازه گیری نیروهای ضعیف در محدوده $10^{-12}\ N$ تا $10^{-15}\ N$ است که به پارامتر های سیستم وابسته است [۴].

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل حسگر اپتیکی ارایه شد و دینامیک این سیستم در شرایط پایدار و دوپایداری بررسی شد. بیشترین حساسیت نسبت به نیروی خارجی در ناحیه دوپایداری رخ می دهد. با افزایش دمای سیستم، حساسیت دستگاه در مناطقی که دور از حالت دوپایداری است کاسته می شود اما در منطقه دوپایداری حساسیت به میزان بسیار کمی تغییر می کند.

مراجع

[1] C. Bradaschia et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A 289, 518 (1990).
[2] A. Abramovici et al., Science 256, 325 (1992).
[3] J. Mertz et al., Appl. Phys. Lett. 62, 2344 (1993).
[4] V. B. Braginsky and F. Ya Khalili, Quantum Measurements, (1992).
[5] J.L. Arlett, J.R. Maloney, B. Gudlewski, and M.L. Roukes, Nano Lett. 6, 1000 (2006).
[6] R. Fermani, S. Mancini and P. Tombesi, Phys. Rev. A 70, 045801 (2004).
[7] M. Lucamarini, D. Vitali, and P. Tombesi, Phys. Rev. A 74, 063816 (2006).
[8] D. Vitai, et al., Phys. Rev. Lett. **98,** 030405 (2007)
[۹] س. قلیزاده، حسگر اپتومکانیکی، دانشکده علوم، دانشگاه مازندران (۱۳۹۰).
[10] R. Ghobadi, et al., Phys. Rev. A **84**, 033846 (2011).

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]