بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

مهندسی حالت‌های کوانتومی میدان اتمی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین در برهم‌کنش با یک کاواک اپتیکی

علی دلفی[۱و۲]، محمد حسین نادری[۲] و محمود سلطان الکتابی[۲]

[۱]مرکز ملی علوم و فنون لیزر ایرن، تهران

[۲]گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

چکیده – در این مقاله به بررسی نظری سامانه‌ای متشکل از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین که در داخل شبکه‌ی اپتیکی یک کاواک به دام افتاده است می‌پردازیم. نشان داده می‌شود که چگونه با استفاده از اثر برهمکنش غیر خطی اتم-اتم می‌توان حالتِ افت و خیزهای کوانتومی میدان اتمی (مد بوگولیوبوف) را دستکاری و کنترل کرد و به حالت‌های چلانده دست یافت.

کلید واژه-چگالیده بوز-اینشتین، شبکه اپتیکی، حالت چلانده

Quantum state engineering of the atomic field of a Bose-Einstein condensate interacting with an optical cavity

Ali Dalafi[1,2], Mohammd Hosein Naderi[2], Mahmoud Soltanolkotabi[2]

[1]Iranian National Center of Laser Science and Technology (INLC), Tehran

[2]Quantum Optics Group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan

Abstract- In this paper we investigate theoretically a system consisting of a Bose-Einstein Condensate (BEC) trapped inside the optical lattice of an optical cavity. It is shown that using the nonlinear atom-atom interaction, how one can manipulate and control the state of the Bogoliubov mode (the quantum fluctuations of the atomic field) and produce squeezed states.

Keywords: BEC, optical lattice, squeezed state

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

۱- مقدمه

چنانچه تعداد N بوزون در داخل یک چاه پتانسیل به دام بیفتند و تا دماهای بسیار پایین (در حدود میکرو کلوین) سرد شوند، آنگاه جمعیت بزرگی از آنها در پایین‌ترین تراز انرژی چاه پتانسیل قرار می‌گیرد و یک چگالیده بوز-اینشتین تشکیل می‌شود[۱].

در این مقاله به بررسی چگالیده‌ای متشکل از تعداد N اتم روبیدیوم می‌پردازیم که در داخل شبکه‌ی اپتیکی (پتانسیل تناوبی ناشی از موج ایستاده‌ی الکترومغناطیسی) یک کاواک قرار گرفته و به وسیله دو پتانسیل هماهنگ، یکی در راستای طولی (با بسامد $\omega_{\parallel}$) و دیگری در راستای عرضی کاواک (با بسامد $\omega_{\perp}$) به دام افتاده است[۲]. در اثر اندرکنش با میدان کوانتومی درون کاواک تعداد محدودی از اتم‌ها به نخستین حالت برانگیخته‌ی شبکه اپتیکی رانده می‌شوند و موجب بروز افت و خیزهای کوانتومی در میدان اتمی چگالیده می‌شوند که به آن مد بوگولیوبوف می-گویند. در این مقاله نشان می‌دهیم که از آهنگ برخورد بین اتم‌ها (که توسط بسامد $\omega_{\perp}$ قابل کنترل است) می‌توان به عنوان پارامتری برای کنترل درجه‌ی چلاندگی مد بوگولیوبوف استفاده کرد.

در بخش ۲ به توصیف نظری سامانه و استخراج هامیلتونی آن می‌پردازیم و در بخش ۳ عملگر تحول زمانی سامانه را به دست می‌آوریم. در بخش ۴ ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف را به دست آورده و در بخش ۵ خواص چلاندگی آن را بررسی می‌کنیم. سرانجام در بخش ۶ نتایج به دست آمده را جمع بندی می‌کنیم.

۲- توصیف نظری سامانه

سامانه‌ی مورد مطالعه عبارتست از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین متشکل از تعداد N اتم دو ترازی با جرم m_0 و بسامد گذار ω_a که در داخل یک کاواک اپتیکی با طول L قرار گرفته است. کاواک مزبور از طریق یکی از آینه‌هایش به وسیله یک لیزر با بسامد ω_p با آهنگ η دمیده می‌شود. فرض می‌کنیم که چگالیده در داخل یک دام متقارن استوانه‌ای با فرکانس عرضی $\omega_{\perp}$ و فرکانس طولی $\omega_{\parallel}$ محبوس شده است. در رژیم پاشنده، که $\Delta_a = \omega_p - \omega_a$ بسیار بزرگتر از پهنای خط اتمی γ است، حالت برانگیخته‌ی الکترونی اتم را می‌توان به طور آدیاباتیک حذف نمود و از اثر گسیل خود به خود اتم‌ها صرف نظر کرد[۳]. در چنین شرایطی چنانچه $\omega_{\perp} \gg \omega_{\parallel}$ باشد می-توان درجه‌ی آزادی حرکتی اتم‌ها را در راستای محور x در چهارچوب فرمولبندی کوانتش دوم با میدان کوانتومی $\Psi(x)$ و دینامیک سامانه را با هامیلتونی مؤثر یک بعدی زیر توصیف کرد[۴]:

(۱)

$$H = \int_{-L/2}^{L/2} \Psi^{\dagger}(x)\Big(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} + \hbar U_0 \cos^2(kx) a^{\dagger}a + \tfrac{1}{2}U_s \Psi^{\dagger}(x)\Psi(x)\Big)\Psi(x)\,dx + \hbar\Delta_0 a^{\dagger}a.$$

در اینجا a عملگر نابودی میدان اپتیکی درون کاواک، $\Delta_0 = \omega_0 - \omega_p$ (ω_0، بسامد بازآوایی کاواک)، $U_0 = g_0^2/\Delta_a$ (g_0، بسامد رابی خلأ) و $U_s = 4\pi\hbar^2 a_s / m_0$ است که در آن، a_s طول پراکندگی در برهم‌کنش اتم-اتم است[۵،۶]. هم‌چنین $k = \omega_c / c$ عدد موج میدان اپتیکی درون کاواک است.

در رژیم برهم‌کنش ضعیف، یعنی $U_0 \langle a^{\dagger}a \rangle \le 10\omega_R$ که در آن، $\omega_R = \hbar k^2 / 2m_0$ بسامد پس‌زنی اتمی است، می-توان میدان اتمی را به دو مد متقارن کناری با تکانه‌های $\pm\hbar k$ محدود کرد که در اثر اندرکنش اتم-فوتون برانگیخته می‌شوند[۷]. بدین ترتیب با توجه به بقای پاریته و در تقریب بوگولیوبوف، میدان کوانتومی اتمی به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{N}{L}} + \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(2kx)\,c\,. \qquad (۲)$$

در این معادله c عملگر نابودی مد بوگولیوبوف است که بیانگر افت و خیزهای کوانتومی حول مد چگالیده (مد تکانه‌ی صفر) است. در حد میدان‌های اپتیکی ضعیف احتمال اشغال مد c بسیار کوچکتر از مدِ با تکانه‌ی صفر است به گونه‌ای که $\langle c^{\dagger}c \rangle \ll N$ است و در نتیجه می‌توان مد چگالیده را با عدد $\sqrt{N}$ تقریب زد (تقریب بوگولیوبوف)[۸]. با قرار دادن معادله (۲) در معادله (۱) هامیلتونی سامانه به صورت زیر در می‌آید:

$$H = \hbar\delta_a a^{\dagger}a + \hbar\omega_c c^{\dagger}c + \tfrac{1}{4}\hbar\omega_{sw}(c^2 + c^{\dagger 2}) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\hbar\zeta a^{\dagger}a(c + c^{\dagger}). \qquad (۳)$$

در اینجا $\delta_a = \Delta_0 + \frac{1}{2}NU_0$ بسامد مؤثر میدان اپتیکی، $\omega_c = 4\omega_R + \omega_{sw}$ بسامد مؤثر مد بوگولیوبوف،

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

$\omega_{sw}=8\pi\hbar a_s N/m_0 Lw^2$ بسامد پراکندگی در برهم‌کنش میان اتم‌ها، و $\zeta=\frac{1}{2}\sqrt{N}U_0$ ثابت برهم‌کنش بین مد بوگولیوبوف و میدان اپتیکی درون کاواک است.

آخرین جمله‌ی هامیلتونی (۳) جمله‌ی برهم‌کنش اپتومکانیکی است[۸]. در سامانه‌های اپتومکانیک (کاواک-هایی با آینه‌ی متحرک)[۹،۱۰] فشار تابشی ناشی از میدان درون کاواک باعث حرکت ارتعاشی آینه‌ی متحرک می‌شود و در نتیجه منجر به بروز یک پتانسیل اندرکنش به شکل آخرین جمله معادله (۳) می‌شود که در آن، مد c نقش مد حرکت ارتعاشی آینه را بازی می‌کند. بدین ترتیب مد بوگولیوبوف در سامانه‌ی حاضر، متناظر با مد ارتعاشی آینه‌ی متحرک در یک سامانه‌ی اپتومکانیک است.

۳- دینامیک سامانه

اکنون می‌خواهیم با استفاده از هامیلتونی (۳)، عملگر تحول زمانی سامانه را به دست آوریم. بدین منظور این هامیلتونی را در دو مرحله به شکل قطری درخواهیم آورد. در مرحله‌ی اول یک عملگر جابجایی به شکل $D(A)=\exp\left(A(c^\dagger-c)\right)$ تعریف می‌کنیم که در آن، $A=\beta a^\dagger a$ و $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\zeta}{\omega_c+\omega_{sw}/2}$ است [۱۱]. اثر این عملگر بر روی c عبارتست از $D(A)\,c\,D^\dagger(A)=c-A$. بدین ترتیب می‌توان اثر عملگر جابجایی را بر روی هامیلتونی (۳) به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}H' &= D(A)\,H\,D^\dagger(A),\\ &= \hbar\delta_a a^\dagger a+\hbar\omega_c c^\dagger c+\tfrac{1}{4}\hbar\omega_{sw}(c^2+c^{\dagger 2})\\ &\quad -\hbar(\omega_c+\tfrac{1}{2}\omega_{sw})A^2.\end{aligned}\qquad (۴)$$

در مرحله‌ی بعد، اثر عملگر چلاندگی را که به صورت $S(\xi)=\exp\left(\frac{1}{2}\xi(c^2-c^{\dagger 2})\right)$ تعریف می‌شود[۱۲] بر روی هامیلتونی (۴) به دست می‌آوریم. اثر این عملگر بر روی c عبارتست از $S(\xi)\,c\,S^\dagger(\xi)=\mu c+\nu c^\dagger$ که در آن $\mu=\cosh\xi$، $\nu=\sinh\xi$ و ξ پارامتر چلاندگی است[۱۲]. می‌توان نشان داد چنانچه $\xi=\frac{1}{2}\hbar(\omega_c'-\omega_c)$ باشد که در آن $\omega_c'=\sqrt{\omega_c^2-\frac{1}{4}\omega_{sw}^2}$ است و همچنین اگر $\mu=\sqrt{\omega_c/2\omega_c'+1/2}$ و $\nu=\sqrt{\omega_c/2\omega_c'-1/2}$ انتخاب شوند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}H'' &= S(\xi)\,H'\,S^\dagger(\xi),\\ &= \hbar\omega_c' c^\dagger c+\hbar\delta_a a^\dagger a-\frac{\hbar}{2}\frac{\zeta^2}{\omega_c+\frac{1}{2}\omega_{sw}}(a^\dagger a)^2.\end{aligned}\qquad (۵)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۴) و (۵) می‌توان عملگر تحول سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}U(t) &= \exp\left(\frac{-it}{\hbar}H\right),\\ &= D^\dagger(A)S^\dagger(\xi)\exp\left(\tfrac{-it}{\hbar}H''\right)S(\xi)D(A).\end{aligned}\qquad (۶)$$

۴- مهندسی حالت‌های کوانتومی و تولید چلاندگی

با فرض این که میدان اپتیکی در حالت اولیه‌ی همدوس $|\alpha\rangle$ و مد بوگولیوبوف در حالت خلأ آماده‌سازی شده باشند، یعنی $|\psi(0)\rangle=|\alpha\rangle_a\otimes|0\rangle_c$، تحول زمانی بردار حالت سامانه با استفاده از رابطه $|\psi(t)\rangle=U(t)|\psi(0)\rangle$ محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن بسط حالت همدوس بر حسب پایه فوک و با استفاده از معادله (۶) بردار حالت سامانه در لحظه t به دست می‌آید. $|\psi(t)\rangle$ بردار حالت سامانه‌ی متشکل از میدان اپتیکی و چگالیده است. از آنجا که می‌خواهیم خواص آمار کوانتومی چگالیده را بررسی کنیم، باید ماتریس چگالی چگالیده را به دست آوریم که عبارتست از $\rho_c(t)=Tr_a[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|]$ که در آن، برچسب c به مد بوگولیوبوف و برچسب a به مد میدان اپتیکی اشاره دارد. پس از انجام محاسبات، ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف به صورت زیر به دست می‌آید

$$\rho_c(t)=e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\left|\varphi_{n,\xi}(\tau)\right\rangle\left\langle\varphi_{n,\xi}(\tau)\right|.\qquad (۷)$$

در اینجا $\left|\varphi_{n,\xi}(\tau)\right\rangle=D^\dagger(\beta n)S^\dagger(\xi)\left|\beta n e^{-i\tau},\xi e^{-2i\tau}\right\rangle$ است که در آن $\tau=\omega_c' t$ است. با توجه به این که $\left|\beta n e^{-i\tau},\xi e^{-2i\tau}\right\rangle$ یک حالت چلانده است، معادله (۷) نشان می‌دهد که بعد از گذشت زمان t حالت سامانه به صورت یک برهم‌نهی همدوس از حالت‌های چلانده در می‌آید. لازم به توضیح است که در اینجا از اثرات ناشی از اتلاف صرف نظر شده است.

۵- بررسی خواص چلاندگی

چنانچه یک میدان کوانتومی در یک حالت چلانده قرار

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

گرفته باشد، آنگاه افت و خیزهای کوانتومی مربوط به یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان (عملگرهای متناظر با مکان و تکانه) کاهش می‌یابد در حالی که برای مؤلفه‌ی دیگر، افت و خیزهای مزبور افزایش می‌یابد[۱۲]. مؤلفه-های کوادراتوری میدان بوگولیوبوف به صورت $q=\frac{1}{\sqrt{2}}(c+c^{\dagger})$ و $p=\frac{1}{\sqrt{2}i}(c-c^{\dagger})$ تعریف می‌شوند. درجه‌ی چلاندگی در هر یک از این مؤلفه‌ها با پارامتر چلاندگی مشخص می‌شود: $S_q(\tau)=2\langle(\Delta q)^2\rangle-1$ و $S_p(\tau)=2\langle(\Delta p)^2\rangle-1$ که در آنها، $(\Delta q)^2=\langle q^2\rangle-\langle q\rangle^2$ و $(\Delta p)^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2$ عدم قطعیت‌های کوانتومی هستند. بدین ترتیب، شرط چلاندگی در هر یک از مؤلفه-ها به صورت $S_i(\tau)<0$ $(i=p\,or\,q)$ تعریف می‌شود.

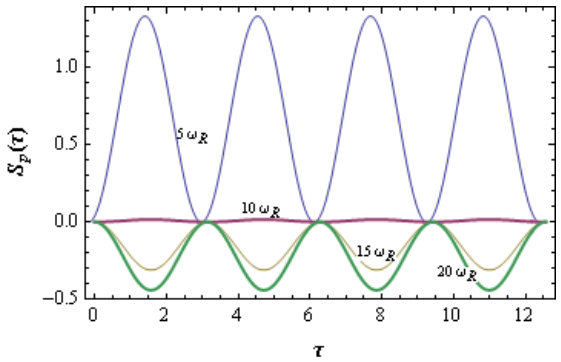
با در دست داشتن ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف (معادله (۷))، می‌توان پارامتر چلاندگی $S_p(\tau)$ را به دست آورد:

$$S_p(\tau)=4\beta^2|\alpha|^2(\mu-\nu)^4\sin^2\tau + 2\nu(\mu-\nu)\big((\mu-\nu)(\mu\cos 2\tau+\nu)-1\big). \quad (۸)$$

در اینجا باید تاکید شود که عامل تولید اثر چلاندگی، برهم‌کنش غیر خطی اتم-اتم است. بنا بر توضیحات بخش قبل چنانچه این عامل غیرخطیت، صفر شود (یعنی اگر $\omega_{sw}=0$ آنگاه $\xi=0$ و در نتیجه $(\mu=1,\nu=0)$ خواهد شد. بدین ترتیب پارامتر چلاندگی به صورت $S_p(\tau)=4\beta^2|\alpha|^2\sin^2\tau$ درمی‌آید که همواره مثبت است. یعنی در غیاب برهم‌کنش اتمی، خاصیت چلاندگی از بین می‌رود.

در شکل (۱) پارامتر چلاندگی $S_p(\tau)$ بر حسب متغیر زمان بدون بعد τ رسم شده است. برای رسم این نمودار از داده‌های تجربی مراجع [۱۳،۱۴] استفاده شده است، یعنی تعداد $N=10^5$ اتم ^{87}Rb در کاواکی با طول $L=178\,\mu m$ به دام افتاده و تا دمای $0.1\,\mu K$ سرد شده-اند. $\lambda=780\,nm$ طول موج میدان اپتیکی ، $\Delta_a=2\pi\times 58\,GHz$ ، $g_0=2\pi\times 14.1\,MHz$ و طول پراکندگی در برهمکنش اتم-اتم $a_s=5\,nm$ است.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است خاصیت چلاندگی به ازای $\omega_{sw}>10\omega_R$ بروز می‌کند. بدین ترتیب از ω_{sw} می‌توان به عنوان عاملی برای کنترل درجه‌ی چلاندگیِ حالت مد بوگولیوبوف استفاده کرد. این پارامتر از طریق $\omega_{\perp}$ قابل کنترل است. از آنجایی که بسامد دام عرضی به طور تجربی قابل کنترل است، بدین ترتیب با تغییر آن می‌توان نرخ برخورد اتمی را تغییر داد و در نتیجه درجه چلاندگی مد بوگولیوبوف را کنترل کرد.



شکل ۱ : تحول زمانی پارامتر چلاندگی $S_p(\tau)$ به ازای داده‌های تجربی مرجع [۱۴] برای چهار مقدار مختلف بسامد برخورد: $\omega_{sw}=5\omega_R$ (منحنی آبی)، $\omega_{sw}=10\omega_R$ (منحنی بنفش)، $\omega_{sw}=15\omega_R$ (منحنی خردلی) و $\omega_{sw}=20\omega_R$ (منحنی سبز). همچنین $\alpha^2=0.01$ فرض شده است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی اندرکنش یک چگالیده بوز-اینشتین با میدان کوانتومی درون یک کاواک اپتیکی پرداخته و نشان داده‌ایم که اندرکنش اتم-میدان موجب بروز افت و خیزهای کوانتومی در میدان اتمی می‌شود. حالت کوانتومی این افت و خیزها به نرخ برخورد بین اتم-ها بستگی دارد به گونه‌ای که افزایش نرخ برخورد اتمی می‌تواند منجر به بروز خاصیت چلاندگی در افت و خیزهای میدان اتمی شود.

مراجع

[1] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
[2] O. Morsch and M. Oberthaler, Rev. Mod. Phys. **78**, 179 (2006).
[3] C. Maschler and H. Ritsch, Opt. Commun. **243**, 145 (2004).
[4] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, and Sh. Barzanjeh, Phys. Rev. A **87**, 013417 (2013).
[5] P. Domokos and H. Ritsch, J. Opt. Soc. Am. B **20**, 1098 (2003).
[6] C. Maschler and H. Ritsch, Phys. Rev. Lett. **95**, 260401 (2005).
[7] D. Nagy, P. Domokos, A. Vukics, and H. Ritsch, Eur. Phys. J. D **55**, 659 (2009).
[8] R. Kanamoto and P. Meystre, Phys. Scr. **82**, 038111 (2010).
[9] J. D. McCullen, P. Meystre, and E. M. Wright, Opt. Lett. **9**, 193-195 (1984).
[10] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, and E. Vignes, J. Opt. Soc. Am. B 2, 1830-1840 (1985).

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

[11] Bose S, Jacobs K and Knight P L 1997 *Phys. Rev*. A **56** 4175
[12] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
[13] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner, and T. Esslinger, Science **322**, 235 (2008).
[14] S. Ritter, F. Brennecke, K. Baumann, T. Donner, C. Guerlin, and T. Esslinger, Appl. Phys. B **95**, 213 (2009).

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]