بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

# درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی

علیرضا باقری[۱]، غلامرضا هنرآسا[۲] و عبدالرسول قرائتی[۱]

۱-گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور شیراز، شیراز

۲-گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

**چکیده - حالت‌های همدوس غیرخطی و حالت‌های همدوس فوتون افزوده از تعمیم‌های مهم حالت‌های همدوس استاندارد هستند. در این مقاله ابتدا مروری بر حالت‌های همدوس غیرخطی فوتون افزوده خواهیم کرد. سپس درهم تنیدگی ایجاد شده توسط یک پرتو شکاف وقتی حالت‌های همدوس غیرخطی فوتون افزوده از یک طرف و حالت خلا از سوی دیگر وارد پرتو شکاف می شوند را با استفاده از آنتروپی خطی بررسی می‌کنیم**

کلید واژه- حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی، درهم تنیدگی، شکافنده پرتو

# Entanglement of Nonlinear Photon-Added Coherent States

Alireza Bagheri[1], Gholamreza Honarasa[2], and Abdolrasoul Gharaati[3]

1. Physics Group, Shiraz Payam Noor University, Shiraz
2. Physics Group, Faculty of Science, Shiraz University of Technology, Shiraz

Abstract- Nonlinear coherent states and photon added coherent states are two of the important generalizations of standard coherent states. In this article, at first we review the nonlinear photon added coherent states. Then we investigate the entanglement generated via a beam splitter when a nonlinear photon added coherent state is injected on one input mode and vacuum state is injected on the other one using linear entropy.

Keywords: Beam splitter, Entanglement, Nonlinear photon added coherent states

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]

## ۱- مقدمه

حالتهای همدوس میدان تابشی به‌صورت ویژه حالت عملگر نابودی نوسانگر هماهنگ تعریف می‌شود. در سال‌های ۱۹۹۶ و۱۹۹۷ تعمییم مهمی به حالت‌های همدوس به نام حالت‌های همدوس غیرخطی توسط مانکو و همکارانش داده شده[۱و۲] که به خاطر ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها در اپتیک کوانتومی و فیزیک نوین در دهه اخیر توجه بسیاری را به خود معطوف ساخته است.

حالت‌های همدوس فوتون افزوده برای اولین بار در سال ۱۹۹۱ معرفی و در سال ۲۰۰۴ تولید شدند[۳و۴]. در ادامه تعمیم‌های حالت‌های همدوس و همدوس فوتون افزوده، حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی یا حالت‌های همدوس فوتون افزوده تغییر شکل یافته توسط صفاتیان و توسلی معرفی گردید [۵]. در این مقاله با استفاده از آنتروپی خطی به بررسی در هم‌تنیدگی حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی وقتی از یک پرتو شکاف عبور می‌کنند می پردازیم.

## ۲- حالت‌های همدوس غیرخطی فوتون افزوده

حالت‌های همدوس استاندارد با رابطه ویژه مقداری $a|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle$ در سال ۱۹۲۶ توسط شرودینگر معرفی شد که در آن $a$ عملگر نابودی بوزونی می‌باشد. شکل صریح حالت‌های همدوس استاندارد در فضای حالت‌های عددی به صورت زیر است:

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad (۱)$$

حالت‌های همدوس غیر خطی به عنوان ویژه حالت عملگر نابودی تغییر شکل یافته $A = af(n)$ به صورت زیر تعریف شدند [۱و۲]:

$$A|\alpha, f\rangle = \alpha|\alpha, f\rangle \qquad (۲)$$

که در آن $f(n)$ تابعی از شدت $(n=a^{\dagger}a)$ تابش الکترومغناطیسی است

بسط صریح حالت‌های همدوس غیرخطی در فضای حالت‌های عددی به‌صورت زیر است:

$$|\alpha, f\rangle = N_{\alpha,f} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}[f(n)]!} |n\rangle \qquad (۳)$$

که در آن $N_{\alpha,f} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!\{[f(n)]!\}^2})^{\frac{-1}{2}}$ ضریب بهنجارش و $[f(n)]! = f(n)\, f(n-1)\ldots f(1)$ است.

از طرفی حالت‌های همدوس فوتون افزوده با تأثیر مکرر $a^{\dagger}$ بر روی حالت‌های همدوس استاندارد به شکل زیر ساخته می‌شوند [۳]:

$$|\alpha, k\rangle = a^{\dagger k}|\alpha\rangle \qquad (۴)$$

حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی از تأثیر $k$ مرتبه عملگر آفرینش تعمیم یافته $A^{\dagger}$ بر روی حالت‌های همدوس استاندارد به شکل زیر بدست می‌آیند [۵]:

$$|\alpha, f, k\rangle = A^{\dagger k}|\alpha\rangle \qquad (۵)$$

شکل صریح این حالت‌ها در فضای حالت‌های عددی به‌صورت زیر است:

$$|\alpha, f, k\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n [f(n+k)]! \sqrt{(n+k)!}}{n![f(n)]!} |n+k\rangle \qquad (۶)$$

که در آن

$$N = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n} (n+k)! [f^2(n+k)]!}{(n!)^2 [f^2(n)]!} \right)^{-1/2} \qquad (۷)$$

## ۳- پرتو شکاف

شکافنده پرتو یا پرتو شکاف (Beam splitter) وسیله اپتیکی است که می‌توان برای تولید درهم‌تنیدگی بین دو مد کوانتومی استفاده کرد. فرض می‌کنیم یک حالت دلخواه $|\Psi\rangle$ بطور افقی و یک حالت خلا $|0\rangle$ بطور عمودی وارد پرتو شکاف شوند. حالت خروجی این دستگاه به‌صورت زیر می باشد:

$$|out\rangle = B|\mathrm{int}\rangle \qquad (۸)$$

که در آن حالت ورودی به صورت زیر است:

$$|\mathrm{int}\rangle = |\Psi\rangle \otimes |0\rangle \qquad (۹)$$



[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]

$B$ یک عملگر واحد است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$B=\exp[\frac{\theta}{2}(a^{\dagger}b\ \ +a\ \ b^{\dagger})] \qquad (۱۰)$$

که در آن $a$، $b$، $a^{\dagger}$ و $b^{\dagger}$ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق برای مد ورودی اول و دوم هستند.

اثر شکافنده پرتو روی یک حالت دلخواه عددی $|\Psi\rangle=|n\rangle$ با حالت خلا به‌صورت زیر است [۶]:

$$B|n\rangle|0\rangle=\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{n!}{p!(n-p)!}\right)^{1/2}t^{p}r^{(n-p)}|p\rangle|n-p\rangle \qquad (۱۱)$$

که در آن $t$ و $r$ به ترتیب ضریب عبور و بازتاب پرتو شکاف می‌باشند که شرط بهنجارش $|t|^2+|r|^2=1$ را برآورده می‌سازند. $|p\rangle$ و $|n-p\rangle$ حالت‌های پایه میدان خروجی در فضای هیلبرت می‌باشند. با در نظر گرفتن حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی به عنوان حالت ورودی به پرتو شکاف، حالت خروجی به‌صورت زیربه‌دست می‌آید [۷]:

$$\begin{aligned}|out\rangle&=B|\alpha,k,f\rangle|0\rangle\\&=N\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}[f(n+k)!\sqrt{(n+k)!}}{n![f(n)]!}B|n+k\rangle|0\rangle\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از معادله (۱۱) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}|out\rangle&=\frac{N}{\alpha^{k}}\ \ \times\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n+k}\frac{(n+k)![f(n+k)]!}{n![f(n)]!}\frac{\alpha^{p}}{\sqrt{p!}}\times\\&\frac{t^{p}\alpha^{(n+k-p)}r^{(n+k-p)}}{\sqrt{(n+k-p)!}}|p\rangle|n+k-p\rangle\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

## ۴- در هم‌تنیدگی حالت‌های همدوس فوتون افزوده غیرخطی

با استفاده از آنتروپی خطی می‌توان درهم تنیدگی حالت‌ها را بررسی کرد. قبل از محاسبه آنتروپی، عملگر چگالی را معرفی می‌کنیم [۸]:

$$\rho=|out\rangle\langle out| \qquad (۱۴)$$

عملگر چگالی کاهش یافته با استفاده از رابطه (۱۳) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\rho_a&=\frac{N^2}{|\alpha|^{2k}}\times\\&\sum_{p,p'=k}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+p)!(m+p')!}{(m+p-k)!(m+p'-k)!}\times\\&\frac{[f(m+p)]![f(m+p')]!}{[f(m+p-k)]![f(m+p'-k)]!}\\&\frac{|\alpha|^{2m}}{m!}|t|^{2m}\frac{\alpha^{p}\alpha^{p'}}{\sqrt{(p)!(p')!}}r^{p}r^{p'}|p\rangle\langle p'|\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

آنتروپی خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S=1-Tr(\rho_a{}^2) \qquad (۱۶)$$

این آنتروپی برای حالت‌های (۱۲) با کمک رابطه (۱۶) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}S&=1-\frac{N^4}{|\alpha|^{4k}}\times\\&\sum_{p,p'=k}^{\infty}\sum_{m,m'=0}^{\infty}\frac{(m+p)!(m+p')!}{(m+p-k)!(m+p'-k)!}\times\\&\frac{(m'+p)!(m'+p')!}{(m'+p-k)!(m'+p'-k)!}\times\\&\frac{[f(m+p)]![f(m+p')]!}{[f(m+p-k)]![f(m+p'-k)]!}\times\\&\frac{[f(m'+p)]![f(m'+p')]!}{[f(m'+p-k)]![f(m'+p'-k)]!}\\&\frac{|\alpha|^{2(m+m'+p+p')}}{m!m'!p!p'!}|t|^{2(m+m')}|r|^{2(p+p')}\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

## ۵- بررسی نتایج

در این بخش درهم‌تنیدگی را برای حالت همدوس فوتون افزوده غیرخطی متناظر با حالت‌های پنسون-سولومون و پتانسیل پوشل- تلر می‌پردازیم.

حالت‌های همدوس زیر توسط پنسون-سولومون معرفی

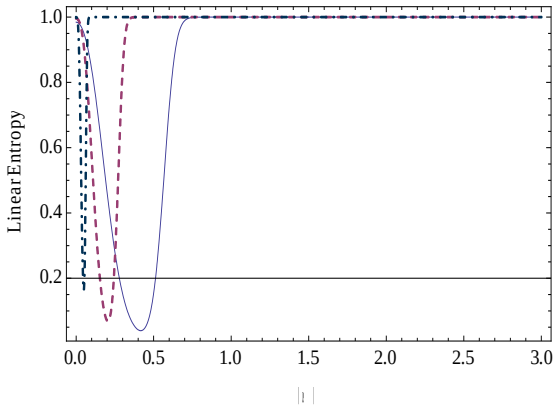


[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]

شد[۹]:

$$|q,z\rangle_{PS} = N(q,|z|^2)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n!}} z^n |n\rangle \qquad (۱۸)$$

که $N(q,|z|^2)^{-1/2}$ ضریب بهنجارش و $0 \le q \le 1$ است. تابع غیر خطی این حالت‌ها به‌صورت $f_{PS}(n) = q^{1-n}$ می‌باشد.



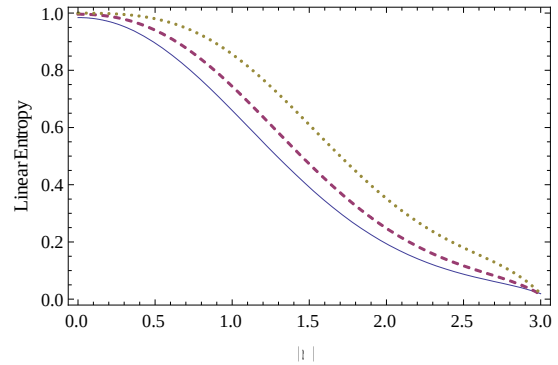

شکل۱: آنتروپی خطی بر حسب $|\alpha|$ برای حالت‌های همدوس پنسون سولومون‌برای $k=3$ (خط‌توپر)، $k=4$ (خط‌چین)، $k=6$ (خط-نقطه).

طیف پتانسیل پوشل-تلر به‌صورت زیر است:

$$e_n = n(n+\nu) \qquad (۱۹)$$

که در آن $\nu > 2$ است. تابع غیر خطی آن برابر است با:

$$f_{PT}(n) = \sqrt{n+\nu} \qquad (۲۰)$$




شکل۲: آنتروپی خطی بر حسب $|\alpha|$ برای تابع پوشل-تلر برای $k=3$ (خط‌توپر)، $k=4$ (خط‌چین)، $k=6$ (خط-نقطه).

برای حالت $k=0$ حالت‌های غیر خطی فوتون افزوده به حالت‌های همدوس غیرخطی میل می‌کنند و بعد از عبور از پرتو شکاف دارای درهم‌تنیدگی صفر می‌باشند. برای حالت $k \neq 0$ با هر انتخابی از پارامترهای حالت همدوس فوتون افزوده غیرخطی حالت خروجی دارای در هم تنیدگی می‌باشند. اکنون تاثیرات دامنه $|\alpha|$ وتعداد فوتون‌های افزوده شده $k$ بر روی درجه در هم تنیدگی حالت خروجی را بررسی می‌کنیم. آنتروپی خطی بر حسب $|\alpha|$ برای حالت‌های همدوس پنسون- سولومون و پتانسیل پوشل- تلر به ازای $k$های مختلف به ترتیب در شکل ۱ و ۲ رسم شده است. در محاسبات انجام شده پرتو شکاف را به‌صورت ۵۰:۵۰ در نظر گرفته شده است، بنابراین $r = \frac{i}{\sqrt{2}}$ و $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. برای حالت‌های پنسون- سولومون مشاهده می‌شود که برای $|\alpha|$های بزرگ درهم تنیدگی ماکزیمم $S \approx 1$ است و هرچه $k$ بیشتر می‌شود محدوده‌ای که درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد کمتر می‌شود. برای حالت‌های متناظر با پتانسیل پوشل- تلر مشاهده می‌شود برای هر مقدار $k$ آنتروپی از ماکزیمم خود با شیب خیلی آهسته کاهش می‌یابد. برای حالتی که $|\alpha|$ خیلی بزرگ باشد درهم‌تنیدگی حالت خروجی تقریبا به کمترین مقدار خود $S \approx 0$ می‌رسد. درجه در هم تنیدگی با افزایش فوتون‌های افزوده رشد پیدا می‌کند؛ وقتی که $k$ بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگ باشد در هم‌تنیدگی در بیشترین مقدار خود ثابت می‌ماند.

## مراجع


[1] de Matos Filho R. L., Vogel W., *Nonlinear coherent stats*, **Phys. Rev. A** 54 (1996) 4560.

[2] Manko V. I., Marmo G., Sudarshan E. C. G., Zaccaria F., *f-oscillators and nonlinear coherent states*. **Phys. Ser.** 55 (1997) 528.

[3] Agarwal G. S., Tara K., *Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state*, **Phys. Rev. A** 43 (1991) 492.

[4] Zavatta A., Viciani S., Bellini M., *Quantum-to-classical transition with single-photon-added coherent states of light*, **Science** 306 (2004) 660.

[5] Safaeian O., Tavassoly M. K., *Deformed photon-added nonlinear coherent states and their non-classical properties*, **J. Phys. A: Math. Theor.** 44 (2011) 225301.

[6] Berrada K., Abdel-Khalek S., Eleuch H., Hassouni Y., *Beam splitting and entanglement generation: excited coherent states*, **Quantum Inf. Process** 12 (2013) 69–82.

[7] Markham, D., Vedral, V., *Classicality of spin-coherent states via entanglement and distinguishability*. **Phys. Rey. A** 67 (2003) 042113.

[8] Mandel L., Wolf E., *Optical coherent and quantum optics*, Cambridge University Press, 1955.

[9] Penson K. A., Solomon A. I., *New generalized coherent States*, **J. Math. phys.** 40 (1999) 2354.




[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]