بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی و بررسی برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها

ندا اصیلی فیروزآبادی[۱] و محمدکاظم توسلی[۱و۲]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله برآنیم تا ضمن معرفی رده‌ی خاصی از میدان‌های تابشی که آن‌ها را حالت‌های عددی جابجاشده‌ی غیرخطی می‌نامیم، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها از جمله آمار کوانتومی زیرپواسونی، چلاندگی‌های مرتبه اول و دوم، توابع شبه-توزیع هوسیمی و ویگنر را بررسی کنیم.

کلید واژه- آمار کوانتومی زیرپواسونی، توابع شبه-توزیع، چلاندگی‌های مرتبه اول و دوم، ویژگی‌های غیرکلاسیکی.

Nonlinear Displaced Number States and Their Non-classical Properties

Asili Firoozabadi, Neda[1]; Tavassoly, Mohammad Kazem[1, 2]

[1]Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[2]Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, we intend to introduce a particular class of radiation field which is called nonlinear displaced number states. Then we will investigate a few of their non-classical properties, like sub-Poissonian statistics, quadratuer squeezing, amplitude-squared squeezing, Husimi and Wigner quasi-distribution functions.

Keywords: sub-Poissonian statistics, quasi-distribution functions, quadratuer squeezing and amplitude-squared squeezing, non-classical properties.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

۱- مقدمه

حالت‌های همدوس، شبیه‌ترین حالت‌های کوانتومی به میدان‌های تابشی هستند که به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی تعریف می‌شوند:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (۱)$$

در اینجا $D(\alpha)=e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ عملگر جابجایی می‌باشد. این حالت‌ها کاملا کلاسیکی و فاقد تمام ویژگی‌های غیرکلاسیکی هستند. در این مقاله برآنیم تا براساس یک رهیافت مستدل در چارچوب تعاریف حالت‌های عددی جابجاشده و نیز حالت‌های همدوس غیرخطی، حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی را معرفی و سپس به بررسی برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها بپردازیم.

حالت‌های عددی جابجاشده $|\alpha,n\rangle$ با تاثیر عملگر جابجایی $D(\alpha)$ روی حالت‌های $|n\rangle$، به شکل زیر ساخته می‌شوند [۱]:

$$|\alpha,n\rangle = D(\alpha)|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m|D(\alpha)|n\rangle |m\rangle \qquad (۲)$$

ضرایب این حالت‌ها (عناصر ماتریسی عملگر $D(\alpha)$) به شکل زیر معرفی شده‌اند:

$$C_m \equiv \langle m|D(\alpha)|n\rangle =$$

$$\begin{cases} N_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (-\alpha^*)^{(n-m)} L_m^{n-m}(|\alpha|^2), & m \le n \\ N_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{(m-n)} L_n^{m-n}(|\alpha|^2), & m \ge n \end{cases} \qquad (۳)$$

ثابت بهنجارش N_1 و N_2 از رابطه (۳) با قید $\langle \alpha,n|\alpha,n\rangle = 1$ به‌دست می‌آید، همچنین $L_q^p(|\alpha|^2)$ معرف چندجمله‌ای‌های لاگر است. از سوی دیگر حالت‌های همدوس غیرخطی به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی تغییرشکل یافته $A=af(n)$ به شکل $A|\alpha,f\rangle = \alpha|\alpha,f\rangle$ تعریف می‌شوند. شکل صریح این حالت‌ها برحسب حالت‌های عددی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۲]:

$$|\alpha,f\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}f(n)!}|n\rangle \qquad (۴)$$

۲- معرفی حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی

این حالت‌ها را با تاثیر عملگر جابجایی‌گونه $D_f(\alpha)=e^{\alpha A^\dagger - \alpha^* B}$ روی حالت‌های عددی به‌دست می‌آوریم، که $A^\dagger = f(n)a^\dagger$, $A = a f(n)$ عملگرهای تغییرشکل‌یافته‌ی نابودی و خلق و همچنین $B = a\frac{1}{f(n)}$, $B^\dagger = \frac{1}{f(n)}a^\dagger$ عملگرهای کمکی هستند.

$$|\alpha,f,n\rangle = D_f(\alpha)|n\rangle$$
$$= N \sum_{m=0}^{\infty} \langle m|D_f(\alpha)|n\rangle |m\rangle \qquad (۵)$$

برای داشتن بسط صریح حالت‌های موردنظر کافی است عناصر ماتریسی عملگر $D_f(\alpha)$ را محاسبه کنیم:

$$C_m \equiv \langle m|D_f(\alpha)|n\rangle =$$

$$\begin{cases} N_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (-\alpha^*)^{n-m} L_m^{n-m}(|\alpha|^2), & m \le n \\ N_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}(|\alpha|^2), & m \ge n \end{cases} \qquad (۶)$$

$f(n)!=f(0)f(1)...f(n)$ که $f(0)=1$، همچنین ثابت بهنجارش N_1 و N_2 از رابطه (۴) با قید $\langle \alpha,f,n|\alpha,f,n\rangle = 1$ به‌دست می‌آید.

۳- بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی

حال می‌توان ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی شده را تجزیه و تحلیل کرد. اما قبل از آن باید تابع غیرخطی را تعیین کنیم. هرچند انتخاب توابع غیرخطی مختلف $f(n)$ منجر به تولید حالت‌های عددی جابجاشده‌ی غیرخطی متفاوتی می‌شود که قطعا ویژگی‌های متفاوتی خواهند داشت، ما در این مقاله تابع تغییرشکل $f(n)=(1+kn)^{-1}$ که در آن $k<1$ است را در نظر می‌گیریم [۳].

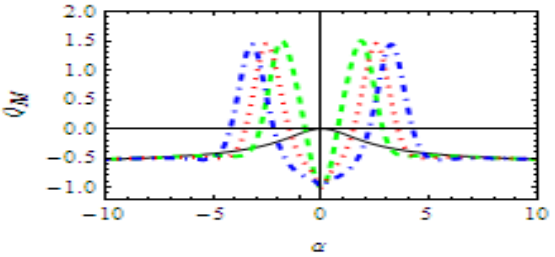
پارامتر مندل: یکی از معیارهایی که معمولا برای تعیین غیرکلاسیکی بودن حالت‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

پارامتر مندل است که به شرح زیر تعریف شده‌است [۴]:

$$Q_M = \frac{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2}{\langle n\rangle} - 1 \qquad (۷)$$

که $n = a^\dagger a$ است و $Q_M > 0$، $Q_M < 0$ و $Q_M = 0$ به‌ترتیب متناظر با آمار فراپواسونی (کلاسیکی)، زیرپواسونی (غیرکلاسیکی) و پواسونی (حالت همدوس استاندارد) است.



شکل۱: پارامتر مندل برحسب مقادیر مختلف α ($|\alpha| \in$)، $k = 0.0$ و به‌ازای مقادیر مختلف n؛ $n = 0$ (خط پیوسته)، $n = 3$ (خط‌چین)، $n = 6$ (نقطه‌چین)، $n = 10$ (خط‌نقطه‌چین).

برطبق شکل ۱، $n = 0$ به ازای همه مقادیر α، و $n = 3,6,10$ به‌ازای مقادیر گسترده‌ای از α، دارای آمار زیرپواسونی و بنابراین غیرکلاسیکی است.

چلاندگی مرتبه اول: برای مطالعه‌ی چلاندگی مرتبه اول، دو عملگر هرمیتی $x = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}i}$ را درنظرگرفته با روابط زیر چلاندگی در راستای x و y را محاسبه می‌کنیم:

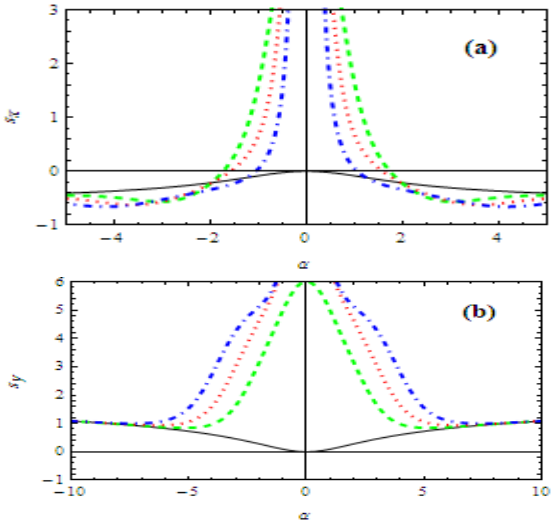
$$s_i = 2\left\langle (\Delta i)^2 \right\rangle - 1, \quad i = x, y \qquad (۸)$$

$$s_x = 2\left\langle a^\dagger a\right\rangle + \left\langle a^2\right\rangle + \left\langle a^{\dagger 2}\right\rangle - \langle a\rangle^2 - \left\langle a^\dagger\right\rangle^2 - 2\langle a\rangle\left\langle a^\dagger\right\rangle \qquad (۹)$$

$$s_y = 2\left\langle a^\dagger a\right\rangle - \left\langle a^2\right\rangle - \left\langle a^{\dagger 2}\right\rangle + \langle a\rangle^2 + \left\langle a^\dagger\right\rangle^2 - 2\langle a\rangle\left\langle a^\dagger\right\rangle \qquad (۱۰)$$

چلاندگی در راستای x (y) زمانی اتفاق می‌افتد که داشته‌باشیم: $-1 < s_x < 0$ ($-1 < s_y < 0$).

همان‌طور که از نمودارهای شکل ۲ پیداست در راستای y چلاندگی دیده نمی‌شود، در حالی‌که در $n = 0$ به ازای همه مقادیر α، و $n = 3,6,10$ برای مقادیر گسترده‌ای از α، حالت به‌دست آمده دارای چلاندگی در راستای x است.

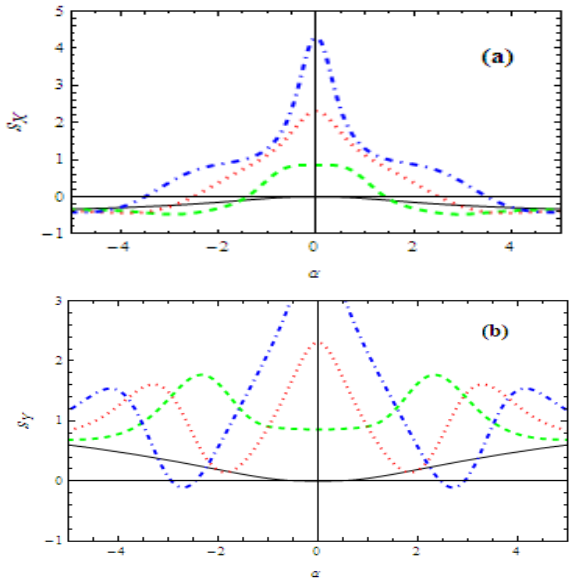


شکل۲: (a) نمودار چلاندگی در راستای x و (b) نمودار چلاندگی در راستای y . بقیه پارامترها مطابق شکل ۱ انتخاب شده‌اند.

چلاندگی دامنه مربعی: به منظور بررسی چلاندگی دامنه مربعی، دو عملگر هرمیتی $X = \frac{a^2 + a^{\dagger 2}}{2}$, $Y = \frac{a^2 - a^{\dagger 2}}{2i}$ را در نظر می‌گیریم. پارامتر چلاندگی مرتبه دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_I = \frac{\left\langle (\Delta I)^2\right\rangle - \left\langle n + \frac{1}{2}\right\rangle}{\left\langle n + \frac{1}{2}\right\rangle}, \qquad I = X, Y \qquad (۱۱)$$

زمانی چلاندگی در X (Y) اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $-1 < S_X < 0$ ($-1 < S_Y < 0$).



شکل۳: (a) نمودار چلاندگی در راستای X و (b) نمودار چلاندگی در راستای Y، پارامترها مطابق شکل ۱ انتخاب شده‌است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

همان‌طورکه از نمودارهای شکل ۳ مشخص است در راستای X چلاندگی در مقادیر مختلف α دیده‌می‌شود در حالی‌که شرط چلاندگی در راستای Y ، تنها در $n=10$ به ازای مقادیر بسیار کوچک α برقرار است.

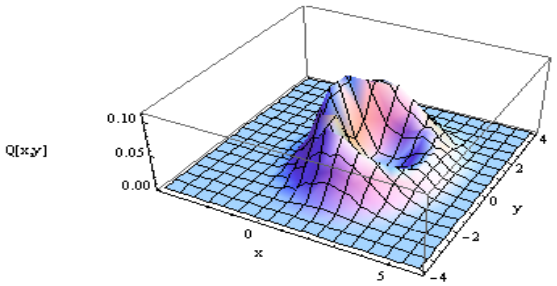
۳-۱- توابع شبه‌توزیع

تابع توزیع هوسیمی: تابع توزیع هوسیمی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q(\beta)=\frac{1}{\pi}\left|\langle\beta|\psi\rangle\right|^2 \qquad (۱۲)$$

در رابطه بالا $|\beta\rangle$ یک حالت همدوس استاندارد و $|\psi\rangle$ حالت کوانتومی دلخواه است که در اینجا حالت عددی جابجاشده غیرخطی است. مطابق با رابطه (۱۲) :

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\pi}e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)} \times\begin{cases}|N_1|^2\dfrac{|\alpha|^{2n}}{n!}\left|\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)!}{f(n)!}(-\frac{\beta^*}{\alpha^*})^m L_m^{n-m}(|\alpha|^2)\right|^2, & m\le n\\ |N_2|^2\dfrac{n!}{|\alpha|^{2n}}\left|\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(m)!}{f(n)!\,m!}(\beta^*\alpha)^m L_n^{m-n}(|\alpha|^2)\right|^2, & m\ge n\end{cases} \qquad (۱۳)$$



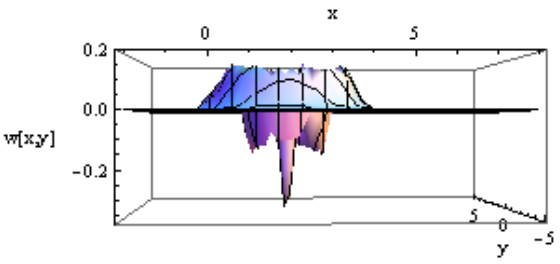
شکل۴: نمودار تابع $Q(\alpha)$ به ازای $\beta=x+iy$، $k=0.007$ ، $n=3$ و $\alpha=2$.

غیردایره‌ای بودن سطح مقطع این تابع توزیع نشان‌دهنده‌ی وجود چلاندگی در راستای یکی از مولّفه‌هاست و همچنین صفرشدن این تابع به معنای منفی‌شدن $P(\alpha)$ (تابع گلاوبر-سودارشان) است [۵].

تابع توزیع ویگنر: تابع توزیع ویگنر می‌تواند مقادیری منفی را در فضای فاز بگیرد. تابع ویگنر حالت مورد نظر را به کمک رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$W(\alpha,\alpha^*)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\langle\alpha,k|\rho|\alpha,k\rangle \qquad (۱۴)$$

$|\alpha,k\rangle$ حالت عددی جابجاشده خطی معرفی شده در معادله (۲) است و $\rho=|n,\beta,f\rangle\langle n,\beta,f|$ ماتریس چگالی متناظر با حالت عددی جابجاشده غیرخطی در رابطه (۶) است.



شکل۵: نمودار تابع ویگنر به ازای $\beta=x+iy$، $k=0.007$ ، $n=3$ و $\alpha=2$.

مطابق با شکل ۸ منفی‌شدن تابع ویگنر در نواحی معینی از فضای فاز در واقع مبین غیرکلاسیکی بودن حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن معرفی رده جدیدی از حالت‌های همدوس، که آن را حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی نامیدیم، ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن را با انتخاب یک تابع غیرخطی معین بررسی و تبیین کردیم و به این نتیجه رسیدیم که این حالت‌ها در برخی نواحی بطور غیرکلاسیکی رفتار می‌کنند.

مراجع

[1] F. A. M. de Oliveira, M. S. kim and P. L. Knight, *Properties of displaced number states*, Phys. Rev. A **41** 5 1990.

[2] V. I. Man'ko, G. Marma, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, Phys. Scr. **55** 528 1997.

[3] C. de Oliveira Guilherme, R. de Almeida Agnaldo, M. Moraes Arthur, *Nonlinear displaced number states*, Phys. Lett A**. 339** 275 2005.

[4] L. Mandel, *Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence*, Opt. Lett. **4** 205 1979.

[5] M. J. Collet, *Generation of number-phase squeezed states*, Phys. Rev. Lett. **70** 3440 1993.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]