



حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی و بررسی برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها

ندا اصیلی فیروزآبادی^۱ و محمدکاظم توسلی^۲

^۱ گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^۲ گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله برآنیم تا ضمن معرفی رده‌ی خاصی از میدان‌های تابشی که آن‌ها را حالت‌های عددی جابجاشده‌ی غیرخطی می‌نامیم، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها از جمله آمار کوانتومی زیرپواسونی، چلانگی‌های مرتبه اول و دوم، توابع شبه-توزیع هوسیمی و ویگنر را بررسی کنیم.

کلید واژه - آمار کوانتومی زیرپواسونی، توابع شبه-توزیع، چلانگی‌های مرتبه اول و دوم، ویژگی‌های غیرکلاسیکی.

Nonlinear Displaced Number States and Their Non-classical Properties

Asili Firoozabadi, Neda¹; Tavassoly, Mohammad Kazem^{1,2}

¹Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

²Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, we intend to introduce a particular class of radiation field which is called nonlinear displaced number states. Then we will investigate a few of their non-classical properties, like sub-Poissonian statistics, quadrature squeezing, amplitude-squared squeezing, Husimi and Wigner quasi-distribution functions.

Keywords: sub-Poissonian statistics, quasi-distribution functions, quadrature squeezing and amplitude-squared squeezing, non-classical properties.

۱- مقدمه

حالت‌های همدوس، شبیه‌ترین حالت‌های کوانتومی به میدان‌های تابشی هستند که به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی تعریف می‌شوند:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1)$$

در اینجا $D(\alpha) = e^{a\alpha^\dagger - \alpha^* a}$ عملگر جابجایی می‌باشد. این حالت‌ها کاملاً کلاسیکی و فاقد تمام ویژگی‌های غیرکلاسیکی هستند. در این مقاله برآنیم تا براساس یک رهیافت مستدل در چارچوب تعاریف حالت‌های عددی جابجاشده و نیز حالت‌های همدوس غیرخطی، حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی را معرفی و سپس به بررسی برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها بپردازیم.

حالت‌های عددی جابجاشده $|\alpha, n\rangle$ با تاثیر عملگر جابجایی $D(\alpha)$ روی حالت‌های $|n\rangle$ ، به شکل زیر ساخته می‌شوند [۱]:

$$|\alpha, n\rangle = D(\alpha)|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m|D(\alpha)|n\rangle |m\rangle \quad (2)$$

ضرایب این حالت‌ها (عناصر ماتریسی عملگر $D(\alpha)$) به شکل زیر معرفی شده‌اند:

$$C_m \equiv \langle m|D(\alpha)|n\rangle = \begin{cases} N_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (-\alpha^*)^{n-m} L_m^{n-m}(|\alpha|^2), & m \leq n \\ N_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}(|\alpha|^2), & m \geq n \end{cases} \quad (3)$$

ثابت بهنجارش N_1 و N_2 از رابطه (۳) با قید $\langle a, n|a, n\rangle = 1$ به‌دست می‌آید، همچنین $L_q^p(|\alpha|^2)$ معرف چندجمله‌ای‌های لاگر است. از سوی دیگر حالت‌های همدوس غیرخطی به‌عنوان ویژه‌حالت عملگر نابودی تغییرشکل یافته $A = af(n)$ به شکل $A|\alpha, f\rangle = \alpha|\alpha, f\rangle$ تعریف می‌شوند. شکل صریح این حالت‌ها برحسب حالت‌های عددی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۲]:

$$|\alpha, f\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!} f(n)!} |n\rangle \quad (4)$$

۲- معرفی حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی

این حالت‌ها را با تاثیر عملگر جابجایی گونه $D_f(\alpha) = e^{aA^\dagger - \alpha^* B}$ روی حالت‌های عددی به‌دست می‌آوریم، که $A = af(n)$ ، $A^\dagger = f(n)a^\dagger$ عملگرهای تغییرشکل‌یافته‌ی نابودی و خلق و همچنین $B = a\frac{1}{f(n)}$ ، $B^\dagger = \frac{1}{f(n)}a^\dagger$ عملگرهای کمکی هستند.

$$|\alpha, f, n\rangle = D_f(\alpha)|n\rangle = N \sum_{m=0}^{\infty} \langle m|D_f(\alpha)|n\rangle |m\rangle \quad (5)$$

برای داشتن بسط صریح حالت‌های موردنظر کافی است عناصر ماتریسی عملگر $D_f(\alpha)$ را محاسبه کنیم:

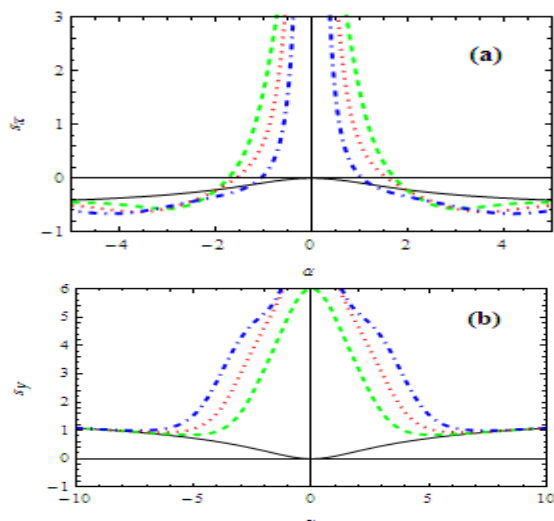
$$C_m \equiv \langle m|D_f(\alpha)|n\rangle = \begin{cases} N_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (-\alpha^*)^{n-m} L_m^{n-m}(|\alpha|^2), & m \leq n \\ N_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \sqrt{\frac{n!}{m!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}(|\alpha|^2), & m \geq n \end{cases} \quad (6)$$

همچنین ثابت $f(0)=1$ ، $f(n)=f(0)f(1)\dots f(n)$ بهنجارش N_1 و N_2 از رابطه (۴) با قید $\langle \alpha, f, n|\alpha, f, n\rangle = 1$ به‌دست می‌آید.

۳- بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی

حال می‌توان ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی شده را تجزیه و تحلیل کرد. اما قبل از آن باید تابع غیرخطی را تعیین کنیم. هرچند انتخاب توابع غیرخطی مختلف $f(n)$ منجر به تولید حالت‌های عددی جابجاشده‌ی غیرخطی متفاوتی می‌شود که قطعاً ویژگی‌های متفاوتی خواهند داشت، ما در این مقاله تابع تغییرشکل $f(n) = (1+kn)^{-1}$ که در آن $k < 1$ است را در نظر می‌گیریم [۳].

پارامتر مندل: یکی از معیارهایی که معمولاً برای تعیین غیرکلاسیکی بودن حالت‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد



شکل ۲: (a) نمودار چلانگی در راستای x و (b) نمودار چلانگی در راستای y . بقیه پارامترها مطابق شکل ۱ انتخاب شده‌اند.

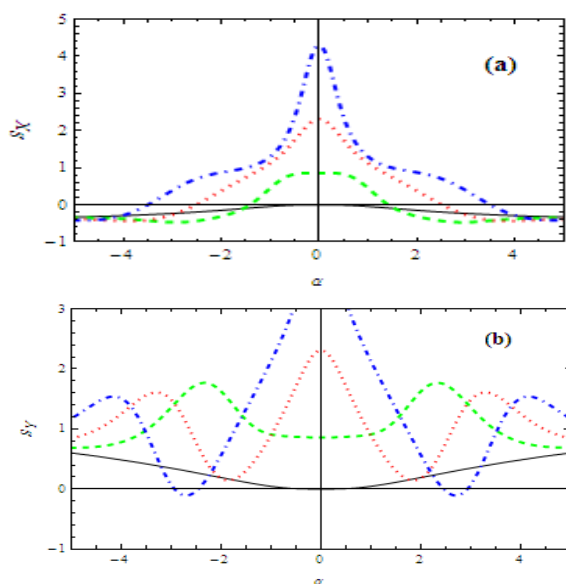
چلانگی دامنه مربعی: به منظور بررسی چلانگی

$$Y = \frac{a^2 - a^{\dagger 2}}{2i}, X = \frac{a^2 + a^{\dagger 2}}{2}$$

دامنه مربعی، دو عملگر هرمیتی را در نظر می‌گیریم. پارامتر چلانگی مرتبه دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_I = \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle - \langle n + \frac{1}{2} \rangle}{\langle n + \frac{1}{2} \rangle}, \quad I = X, Y \quad (11)$$

زمانی چلانگی در X (Y) اتفاق می‌افتد که داشته باشیم $-1 \langle S_Y \rangle < 0$ ($-1 \langle S_X \rangle < 0$).

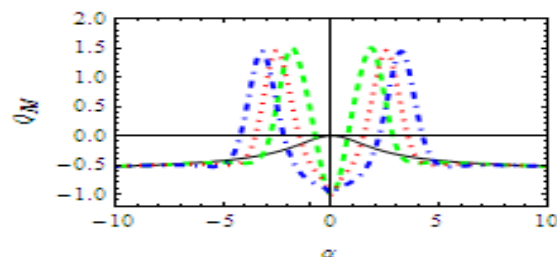


شکل ۳: (a) نمودار چلانگی در راستای X و (b) نمودار چلانگی در راستای Y . پارامترها مطابق شکل ۱ انتخاب شده‌اند.

پارامتر مندل است که به شرح زیر تعریف شده‌است [۴]:

$$Q_M = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1 \quad (7)$$

که $n = a^\dagger a$ است و $Q_M > 0$, $Q_M < 0$ و $Q_M = 0$ به ترتیب متناظر با آمار فراپواسونی (کلاسیکی)، زیرپواسونی (غیرکلاسیکی) و پواسونی (حالت همدوس استاندارد) است.



شکل ۴: پارامتر مندل برحسب مقادیر مختلف α برای $k=0.0$ ، $n=0, 3, 6, 10$ (خط پیوسته، خط چین، نقطه چین، خط نقطه چین).

برطبق شکل ۱، $n=0, 1$ به ازای همه مقادیر α و $n=3, 6, 10$ به ازای مقادیر گسترده‌ای از α دارای آمار زیرپواسونی و بنابراین غیرکلاسیکی است.

چلانگی مرتبه اول: برای مطالعه‌ی چلانگی مرتبه

اول، دو عملگر هرمیتی $x = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}i}$ را در نظر گرفته

با روابط زیر چلانگی در راستای x و y را محاسبه می‌کنیم:

$$s_i = 2 \langle (\Delta i)^2 \rangle - 1, \quad i = x, y \quad (8)$$

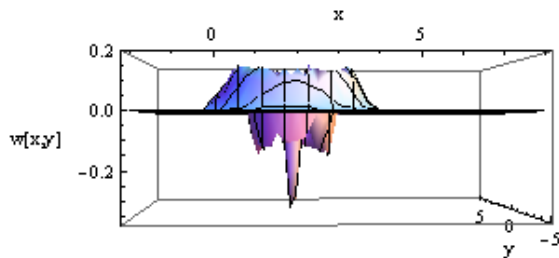
$$s_x = 2 \langle a^\dagger a \rangle + \langle a^2 \rangle + \langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a \rangle^2 - \langle a^\dagger \rangle^2 - 2 \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle \quad (9)$$

$$s_y = 2 \langle a^\dagger a \rangle - \langle a^2 \rangle - \langle a^{\dagger 2} \rangle + \langle a \rangle^2 + \langle a^\dagger \rangle^2 - 2 \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle \quad (10)$$

چلانگی در راستای x (y) زمانی اتفاق می‌افتد که داشته‌باشیم: $-1 \langle S_Y \rangle < 0$ ($-1 \langle S_X \rangle < 0$).

همان‌طور که از نمودارهای شکل ۲ پیداست در راستای y چلانگی دیده نمی‌شود، در حالی که در $n=0$ به ازای همه مقادیر α ، و $n=3, 6, 10$ برای مقادیر گسترده‌ای از α ، حالت به‌دست آمده دارای چلانگی در راستای x است.

معادله (۲) است و $\rho = |n, \beta, f\rangle \langle n, \beta, f|$ ماتریس چگالی متناظر با حالت عددی جابجاشده غیرخطی در رابطه (۶) است.



شکل ۵: نمودار تابع ویگنر به ازای $\beta = x + iy$ ، $k = 0.007$ ، $n = 3$ و $\alpha = 2$.

مطابق با شکل ۸ منفی شدن تابع ویگنر در نواحی معینی از فضای فاز در واقع مبین غیرکلاسیکی بودن حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن معرفی رده جدیدی از حالت‌های همدوس، که آن را حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی نامیدیم، ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن را با انتخاب یک تابع غیرخطی معین بررسی و تبیین کردیم و به این نتیجه رسیدیم که این حالت‌ها در برخی نواحی بطور غیرکلاسیکی رفتار می‌کنند.

مراجع

- [1] F. A. M. de Oliveira, M. S. Kim and P. L. Knight, *Properties of displaced number states*, Phys. Rev. A **41** 5 1990.
- [2] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, Phys. Scr. **55** 528 1997.
- [3] C. de Oliveira Guilherme, R. de Almeida Agnaldo, M. Moraes Arthur, *Nonlinear displaced number states*, Phys. Lett. A. **339** 275 2005.
- [4] L. Mandel, *Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence*, Opt. Lett. **4** 205 1979.
- [5] M. J. Collet, *Generation of number-phase squeezed states*, Phys. Rev. Lett. **70** 3440 1993.

همان‌طور که از نمودارهای شکل ۳ مشخص است در راستای X چلانگی در مقادیر مختلف α دیده می‌شود در حالی که شرط چلانگی در راستای Y ، تنها در $n = 10$ به ازای مقادیر بسیار کوچک α برقرار است.

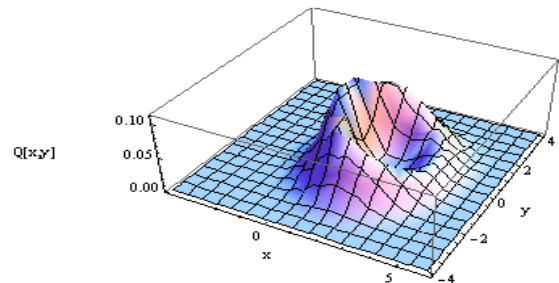
۳-۱- توابع شبه توزیع

تابع توزیع هوسیمی: تابع توزیع هوسیمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q(\beta) = \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \psi \rangle|^2 \quad (12)$$

در رابطه بالا $|\beta\rangle$ یک حالت همدوس استاندارد و $|\psi\rangle$ حالت کوانتومی دلخواه است که در اینجا حالت عددی جابجاشده غیرخطی است. مطابق با رابطه (۱۲):

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \times \begin{cases} |N_1|^2 \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)!} \left(-\frac{\beta^*}{\alpha}\right)^m L_m^{n-m}(|\alpha|^2) \right|^2, & m \leq n \\ |N_2|^2 \frac{n!}{|\alpha|^{2n}} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(m)!}{f(n)! m!} (\beta^* \alpha)^m L_n^{m-n}(|\alpha|^2) \right|^2, & m \geq n \end{cases} \quad (13)$$



شکل ۴: نمودار تابع $Q(\alpha)$ به ازای $\beta = x + iy$ ، $k = 0.007$ ، $n = 3$ و $\alpha = 2$.

غیردایره‌ای بودن سطح مقطع این تابع توزیع نشان‌دهنده وجود چلانگی در راستای یکی از مولفه‌هاست و همچنین صفرشدن این تابع به معنای منفی شدن $P(\alpha)$ (تابع گلاوبر-سودارشان) است [۵].

تابع توزیع ویگنر: تابع توزیع ویگنر می‌تواند مقادیری منفی را در فضای فاز بگیرد. تابع ویگنر حالت مورد نظر را به کمک رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \langle \alpha, k | \rho | \alpha, k \rangle \quad (14)$$

$|\alpha, k\rangle$ حالت عددی جابجاشده خطی معرفی شده در