بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

در همتنیدگی بین یک اتم دوترازه و حالات همدوس نور در یک کاواک غیر خطی

محمد رضا عباسی

شرکت بهره‌برداری نیروگاه اتمی بوشهر، بوشهر

دانشگاه خلیج فارس بوشهر، بوشهر

چکیده - در این مقاله تحول زمانی آنتروپی فون-نویمان به عنوان معیاری از درهم‌تنیدگی بین یک اتم دوترازه و حالات همدوس نور در یک کاواک مورد بررسی قرار می‌گیرد. بر هم کنش اتم و نور همدوس در حضور یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی روی میدهد که باعث جفتیدگی اتم-فوتون از طریق مدل جینز کامینگز خطی وخودجفتیدگی فوتونها از طریق پذیرفتاری مرتبه سوم می شود. با بدست آوردن عملگر تحول زمانی، آنتروپی فون نویمان به صورت تابعی از زمان محاسبه می شوند. نشان داده می شود که افزایش خودجفتیدگی فوتونها باعث کاهش درهم‌تنیدگی می شود. همچنین تاثیر ناکوکی اتم-فوتون بر درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

کلید واژه- درهم‌تنیدگی اتم-فوتون، حالات همدوس، ماده دی الکتریک مرکز تقارنی، آنتروپی فون نویمان.

Entanglement between a Two-level Atom and the Coherent Photonic States in a Nonlinear Cavity

Mohammad Reza Abbasi

Bushehr Nuclear Power Plant Operating Co.-Bushehr

Persian Gulf University of Bushehr-Bushehr

Abstract- In this paper the time evolution of von Neumann entropy as a measure of entanglement between a two-level atom and the photonic coherent states in a cavity is studied. The atom-photon interaction occurs in the presence of a centrosymmetric medium which makes the photonic cavity mode couple with itself via the third order susceptibility. In the present system the atom-photon interaction is assumed to follow the linear Jaynes-Cummings model while the photonic self-coupling is due to presence of a centrosymmetric medium and occurs via the third order susceptibility. After calculating the time-evolution operator, the von Neumann entropy, as a function of time, is determined. It is shown that an increase of photonic self-coupling leads to decreasing of entanglement. Furthermore, the role of atom-photon detuning on the entanglement behavior is also addressed.

Keywords: Atom-photon Entanglement, Coherent states, Centrosymmetric Dielectric, von Neumann Entropy

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

۱- مقدمه

حالات درهم‌تنیده نقش برجسته‌ای را در زمینه های مختلف تئوری اطلاعات کوانتومی مانند انتقال کوانتومی اطلاعات، محاسبات کوانتومی و موارد دیگر[۱و۲] ایفاء می‌کنند. تحقیقات در زمینه درهم‌تنیدگی کوانتومی معمولاً بر روی دو مبحث ایجاد و اندازه گیری آن متمرکز شده است. یکی از راه های ایجاد در هم‌تنیدگی به منظور پردازش کوانتومی استفاده از بر هم کنش یک اتم به عنوان کیوبیت با مدهای یک کاواک اپتیکی برای ایجاد درهم‌تنیدگی های اتم-اتم و اتم-فوتون می باشد[۳و۴]. از این میان با استفاده از حالات درهم‌تنیده پروتکل هایی جهت انتقال کوانتومی اطلاعات ارائه شده است[۵]. ایجاد این حالات بین اتم ها به عنوان کیوبیت هایی که می توانند اطلاعات را در خود ذخیره نمایند با فوتون ها به عنوان منتقل کننده این اطلاعات، اهمیت پرداختن به درهم‌تنیدگی اتم-فوتون را چندین برابر می کند. از این بین با توجه به کمترین میزان عدم قطعیت حالات همدوس فوتونی (Photonic Coherent States) و شباهت های انها به نور کلاسیکی (در چارچوبهای مکانیک کوانتومی) بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی مهم ارزیابی می گردد.

بر هم کنش اتم-فوتون معمولاً در خلاء مورد مطالعه قرار می گیرد اما برای کاربردهایی مانند سوییچینگ اپتیکی[۶] و مدولاسیون و انتخاب فرکانس[۷] وجود دی‌الکتریک در داخل کاواک اجتناب ناپذیر است. از طرف دیگر همدوسی فوتونی باعث ایجاد اثرات مهمی مانند فروهش و نمو(Collapse and Revival) در وارونگی جمعیت اتمی می‌شود [۸]. بنابراین منطقی به نظر می رسد که در بر هم کنش اتم و فوتون ها ،که در اینجا به صورت برهم کنش خطی جینز-کامینگز در نظر گرفته می شود، اثرات برهم کنش های غیرخطی بین فوتون ها با خود را که بدلیل وجود ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی بوجود می آید و اثر خود جفتیدگی کر شکل (Kerr self-coupling) شناخته می شود نیز منظور گردد [۹].

در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی بین یک اتم دوترازه و حالات همدوس فوتونی در یک کاواک که توسط یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی پر شده است، مورد بررسی قرار می گیرد. نشان داده می شود که این درهم‌تنیدگی دارای رفتار فروهش و نمو است که دامنه و زمان این فروهش و نمو ها وابسته به مقدار ناکوکی(Detuning) بین اتم-فوتون و خودجفتیدگی فوتونها می باشند.

به منظور بررسی درهم‌تنیدگی در این سیستم ابتدا هامیلتونی حاکم بر مساله مورد بحث ارائه و هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش بدست می آید. با حل معادله شرودینگر در این تصویر، عملگر تحول زمانی محاسبه می گردد. با اعمال عملگر تحول زمانی بر حالت اولیه که به صورت حالات همدوس فوتونی در نظر گرفته می شود تحول زمانی حالت اولیه بدست می آید. در آخر آنتروپی فون نویمان چگالی بدست آمده و تاثیرات ناکوکی، خودجفتیدگی فوتونها بر درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی مطالعه می‌گردد. همانطور که از هامیلتونی غیر خطی بر می آید خودجفتیدگی فوتونها به صورت غیر خطی میدان فوتونی را جفت کرده که باعث کاهش گذار بین حالات اتمی از طریق افزایش جفتیدگی بین فوتونها می شود. همچنین افزایش ناکوکی باعث کاهش احتمال گذار بین ترازهای اتمی و درنهایت کاهش درهم‌تنیدگی خواهد شد. این مقاله به صورت زیر پیکر بندی می شود: در بخش بعد هامیلتونی سیستم معرفی می شود. سپس عملگر تحول زمانی برای این سیستم محاسبه می گردد. در آخر بعد از مروری بر آنتروپی فون-نویمان، نقش ناکوکی و پذیرفتاری مرتبه سوم بر درهم-تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- هامیلتونی سیستم

برهم‌کنش یک اتم دوترازه با تراز بالای $|a\rangle$ و تراز پایین $|b\rangle$ با حالت همدوس فوتونی یک کاواک که با یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی پر شده است را در نظر می گیریم. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر نوشته می شود،

$$H = H_a + H_f + H_{af} \qquad (۱)$$

که H_a، H_f و H_{af} به ترتیب هامیلتونی اتمی، میدان و برهم‌کنش اتم-فوتون می باشند و عبارتند از ($\hbar = 1$)،

$$H_a = \frac{\omega_0}{2}\sigma_z \qquad (۲)$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

که ω_0 فرکانس طبیعی اتم دوترازه و σ_z مولفه سوم عملگر پائولی است و

$$H_f = \omega a^\dagger a + \chi {a^\dagger}^2 a^2 \quad (۳)$$

ω فرکانس میدان، χ پذیرفتاری مرتبه سوم وابسته به خود جفتیدگی کر و $a(a^\dagger)$ عملگر نابودی(خلق) فوتونی و

$$H_{af} = g(a^\dagger \sigma_- + a\sigma_+) \quad (۴)$$

که g ضریب جفتیدگی بین اتم-فوتون و $\sigma_+(\sigma_-)$ عملگرهای بالابرنده (پایین برنده) پائولی برای یک اتم دوترازه می باشند.

۳- عملگر تحول زمانی

هامیلتونی برهم کنش در پایه های اتمی به صورت زیر داده می شود،

$$H = \begin{pmatrix} 0 & gae^{-i\Gamma t} \\ ge^{i\Gamma t}a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (۵)$$

که در آن $\Gamma = \Delta + 2\chi(a^\dagger a - 1)$ و $\Delta = \omega - \omega_0$ معرف ناکوکی می باشند. با استفاده از معادله حرکت، $i\frac{dU}{dt} = H_I U$، با جایگذاری ماتریس تحول زمانی،

$$U = \begin{pmatrix} U_{aa} & U_{ab} \\ U_{ba} & U_{bb} \end{pmatrix} \quad (۶)$$

چهار معادله جفت شده،

$$i\dot{U}_{aa} = gae^{-i\Gamma t}U_{ba} \quad (۷)$$

$$i\dot{U}_{ab} = gae^{-i\Gamma t}U_{bb} \quad (۸)$$

$$i\dot{U}_{ba} = ge^{i\Gamma t}a^\dagger U_{aa} \quad (۹)$$

$$i\dot{U}_{bb} = ge^{i\Gamma t}a^\dagger U_{ab} \quad (۱۰)$$

می رسیم که با شرط اولیه $U(0) = 1$ و بعد از یک مشتق گیری مجدد به صورت زیر حل می شوند،

$$U_{aa}(t) = e^{-i\left(\frac{\Gamma}{2}+\chi\right)t}\left[cos\Delta_+ t + i\left(\frac{\Gamma}{2}+\chi\right)\frac{sin\Delta_+ t}{\Delta_+}\right] \quad (۱۱)$$

$$U_{ba}(t) = -ige^{i\frac{\Gamma}{2}t}a^\dagger \frac{sin\Delta_+ t}{\Delta_+} \quad (۱۲)$$

$$U_{bb}(t) = e^{i\frac{\Gamma}{2}t}\left[cos\Delta_- t + i\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{sin\Delta_- t}{\Delta_-}\right] \quad (۱۳)$$

$$U_{ab}(t) = -igae^{i\frac{\Gamma}{2}t}\frac{sin\Delta_- t}{\Delta_-} \quad (۱۴)$$

که در آن

$$\Delta_+ = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}+\chi\right)^2 + g^2(a^\dagger a + 1)} \quad (۱۵)$$

$$\Delta_- = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + g^2 a^\dagger a} \quad (۱۶)$$

۴- درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی

آنتروپی فون-نویمان برای ترکیب دو زیرسیستم A و B،که در اینجا حالات اتمی و حالات همدوس فوتونی می باشند، به صورت زیر،

$$S_{vN}(\rho_{AB}) = -Tr(\rho_{AB} log_2 \rho_{AB}) \quad (۱۷)$$

تعریف شده و درهم‌تنیدگی از رابطه،

$$\begin{aligned} E &= S_{vN}(\rho_A) = S_{vN}(\rho_B) \\ &= -Tr\left(\rho_A \log_2 \rho_A\right) = -Tr\left(\rho_B \log_2 \rho_B\right) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

بدست می آید که در آن $\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)}(\rho_{AB})$ چگالی کاهش یافته می باشد. برای یک سیستم جداپذیر درهم-تنیدگی صفر است یعنی کلیه اطلاعات راجع به زیرسیستم ها در دسترس میباشد این در حالیست که برای حالات درهم‌تنیده بیشینه این مقدار برابر با یک است[۱۰] یعنی اطلاعات به صورت مساوی بین زیرسیستم ها تقسیم شده است. حالت اولیه سیستم را به صورت $|\alpha, a\rangle$ را در نظر میگیریم که $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{n!}|n\rangle$معرف حالت همدوس فوتونی است و تعداد متوسط فوتونها در آن با $|\alpha|^2$ داده می شود. با استفاده از معادلات ۱۱ الی ۱۶ خواهیم داشت،

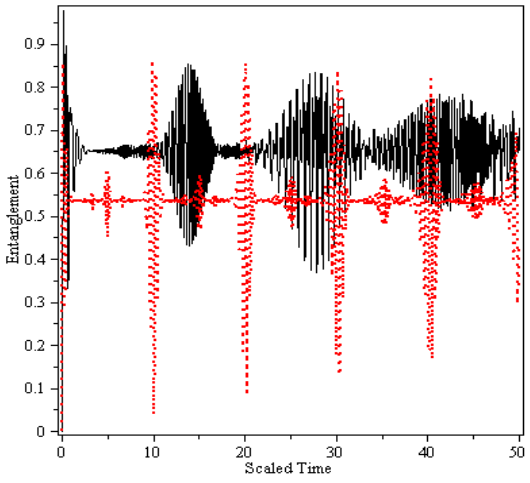
$$\begin{aligned} |\alpha,a\rangle_t = U|\alpha,a\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{i\left(\frac{\Delta}{2}+\chi n\right)t} \times \\ \left(\left[\cos\Omega_n t + i\left(\frac{\Delta}{2}+\chi n\right)\frac{\sin\Omega_n t}{\Omega_n}\right]|n,a\rangle \right. \\ \left. -ig\sqrt{n+1}\frac{\sin\Omega_n t}{\Omega_n}|n+1,b\rangle\right) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

که در آن $\Omega_n = \Delta_+(n)$ می باشد. حال با گرفتن رد جزیی از عملگر چگالی $\rho(t) = |\alpha,a\rangle_t\,{}_t\langle\alpha,a|$ ، و قرار دادن نتایج بدست آمده در معادله (۱۸) درهم‌تنیدگی از رابطه زیر

$$S_{vN}(t) = \frac{-e^{-|\alpha|^2}}{\ln 2}\sum_n \frac{\alpha^{2n}}{n!} \times\left[(f(n,t))\ln(f(n,t)) + (1-f(n,t))\ln(1-f(n,t))\right] \qquad (۲۰)$$

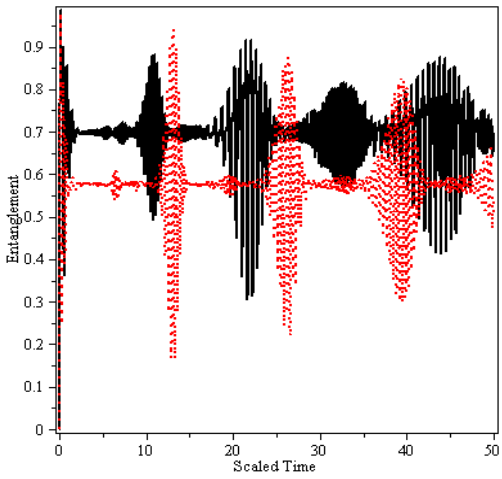
بدست می آید که در آن $f(n,t) = \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2}\sin^2\Omega_n t$ است. ضریب خودجفتیدگی بین فوتون ها باعث جفت شدگی حالات فوتونی میگردد همچنین ناکوکی باعث کاهش احتمال گذار اتم می شود. بنابراین قابل انتظار خواهد بود اگر یکی یا هردوی این پارامترها افزایش یابند متوسط درهم‌تنیدگی کاهش یابد. در شکل ۱و ۲ که درهم‌تنیدگی به صورت تابعی از زمان (gt =) برای مقادیر مختلف خودجفتیدگی فوتونها و ناکوکی بین اتم و فوتون نشان داده شده است، این گفته را تایید می نماید. همچنین درهم‌تنیدگی با فرکانس رابی $\Omega_n = \Delta_+(n)$ نوسان می کند. علاوه بر آن از اشکال ۱ و ۲ می توان نتیجه گرفت که افزایش خودجفتیدگی فوتونها و ناکوکی بین اتم و فوتون باعث کاهش زمان فروهش می گردند.



شکل ۱- درهم‌تنیدگی زمانی اتم و حالات همدوس فوتونی برای مقادیر $\Delta = 2g, |\alpha|^2 = \langle n\rangle = 20$ و مقادیر مختلفχ: $\chi = 0.03g$(خط ممتد)، $\chi = 0.3g$ (خط نقطه چین)

۵- نتیجه گیری

درهم‌تنیدگی معرفی شده در این مقاله (معادله ۲۰) دارای رفتار فروهش و نمو است که این رفتار بر خلاف نوسان آنتروپی سیستم مقاله [۴]، درهم‌تنیدگی بین اتم دوترازه و دو مد همدوس فوتونی، است که در آن آنتروپی دارای رفتار نوسانی است. متوسط درهم‌تنیدگی بین اتم و حالات همدوس فوتونی با افزایش خودجفتیدگی بین فوتونها و ناکوکی اتم و فوتونها کاهش می یابد. همچنین افزایش ناکوکی و خودجفتیدگی بین فوتونها باعث کاهش زمان فروهش می شوند.



شکل ۲- درهمتنیدگی زمانی اتم-فوتون برای مقادیر $\chi =$ $\Delta = 2g, |\alpha|^2 = \langle n\rangle = 20$ و مقادیر مختلفΔ: $0.1g$ (خط ممتد)، $\Delta = 6g$ (نقطه چین)

مراجع

[۱] S. Olmschenk et al, "Quantum teleportation between distant matter qubits" *Science*, **323** pp.486, 2009.

[۲] R. Raussendorf and H.J. Briegel, "A One-way quantum computer", *Phys. Rev. Lett.* **86**, pp.5188, 2001.

[۳] J.M. Raimond, M. Brune and S Haroche, "Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity", *Rev. Mod. Phys.*, **73** pp.565, 2001.

[٤] M.S. Abdalla, J. Krepelka and J Perina, " Effect of Kerr-like medium on a two-level atom in interaction with bimodal oscillator", *J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, pp.1563, 2006.

[٥] M. B. Plenio and V. Vedral, *Contemporary Physics,* **39**, number 6, ,pages 431 ,1998.

[٦] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics* Third edition Academic press 2008

[٧] W. Demtroder, *Laser Spectroscopy* Third edition Springer 2002

[٨] M.O. Scully and M.S. Zubairy, *Quantum Optics* Cambridge University Press, 1997

[٩] M.R. Abbasi and M.M. Golshan, "Dynamics of photon–photon entanglement in a bimodal nonlinear nanocavity", *Opt. Comm.*, **285** pp 3982, 2012

[۱۰] R. Safaiee, M.M. Golshan and N. Foroozani, "Entanglement between electronic spin and subband states", Journal of Statistical Mechanics:Theory and Experiment, doi:10.1088/1742-5468/2009/11/ P11014, 2009.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]