



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



واهمدوسی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون - افزوده در کانال اتلاف فوتون

آرزو محمدبیگی^۱ و محمد کاظم توسلی^۲

^۱ گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^۲ گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله اثر واهمدوسی را روی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بدین منظور، تابع ویگنر وابسته به زمان این حالت‌ها را در چارچوب معادله جامع استاندارد به هنگام برهم‌کنش با محیط در دمای صفر (که کانال اتلاف فوتون نامیده می‌شود) به دست می‌آوریم. سپس با تجزیه و تحلیل تحول زمانی توزیع ویگنر حالت‌های مذکور، اتلاف رفتار غیرکلاسیکی را به صورت نتیجه‌ای از واهمدوسی نشان می‌دهیم.

کلید واژه - تابع ویگنر، حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده، زمان میرایی، واهمدوسی.

Decoherence of Photon-added Even/Odd Coherent States in Photon-loss Channel

Arezoo Mohammadbeigi¹ and Mohammad Kazem Tavassoly^{1,2}

¹ Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

² Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper we study the effect of decoherence on the photon-added even/odd coherent states. For this purpose, the time-dependent Wigner function of the considered states during their interaction with the environment in zero temperature (that is called photon-loss channel) is obtained in the framework of standard master equation. Then, by analyzing the evolution of Wigner distribution of the mentioned states, the loss of nonclassicality behavior as a result of decoherence is clearly shown.

Keywords: Decay time, Decoherence, Photon-added even/odd coherent states, Wigner function.

۱- مقدمه

میدان‌های تابشی غیرکلاسیکی در پردازش اطلاعات کوانتومی کاربرهای زیادی دارند [۱]. غیرکلاسیکی بودن با رفتارهای ویژه‌ای از آمار کوانتومی میدان مانند منفی شدن تابع ویگنر در بخش‌هایی از فضای فاز، چلانگی، آمار زیرپواسونی و ... مشخص می‌شود. در این میان منفی شدن تابع ویگنر به عنوان یک معیار غیرکلاسیکی میدان‌های نوری به طور ویژه مورد توجه قرار گرفته است [۲]. از روش‌های متعددی که برای به دست آوردن حالت‌های غیرکلاسیکی پیشنهاد شده است، می‌توان به حالت‌های همدوس فوتون-افزوده که به صورت $|\alpha\rangle^{\dagger m}$ معرفی شده اند [۳] اشاره کرد. هم چنین نوع جدیدی از حالت‌های غیرکلاسیکی معرفی شده اند که با اعمال مکرر عملگر آفرینش روی حالت‌های همدوس زوج/فرد به دست می‌آیند و حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده نامیده شدند [۴]. بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی، مانند چلانگی، پارامتر مندل و ... برای این حالت‌ها نشان داده است که حالت‌های مذکور نسبت به حالت‌های همدوس رفتار غیرکلاسیکی قابل توجهی دارند [۴]. حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده به صورت زیر تعریف شده اند:

$$|\alpha_{\pm}, m\rangle = N \left(\hat{a}^{\dagger m} |\alpha_{\pm}\rangle \right) \quad (1)$$

که m یک عدد صحیح نامنفی است و $\hat{a}^{\dagger}$ عملگر آفرینش فوتونی است. $|\alpha_{\pm}\rangle$ به ترتیب بیانگر حالت‌های همدوس زوج و فرد به صورت زیر هستند:

$$|\alpha_{\pm}\rangle = N_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \quad (2)$$

در این رابطه N و $N_{\pm}$ در (۱) و (۲) ضرایب بهنجارش هستند. در بیشتر کاربردهای مکانیک کوانتومی، طبیعت اطلاعات پردازش شده حالت‌های غیرکلاسیکی نیازمند حفظ و نگهداری است. اساساً این ویژگی‌ها برای سامانه‌های منزوی ماندگار هستند. اما به ندرت اتفاق می‌افتد که سامانه کوانتومی منزوی باشد و اصولاً برهم کنش سامانه با محیط اطرافش، باعث میرایی رفتار غیرکلاسیکی حالت مورد نظر می‌شود.

منفی شدن تابع شبه توزیع ویگنر شاهدهی قوی برای تبیین

رفتار غیرکلاسیکی حالت سامانه است. با بررسی تابع ویگنر وابسته به زمان می‌توان میرایی رفتار غیرکلاسیکی را مورد مطالعه قرار داد. در طی برهم کنش سامانه با محیط اطرافش، بخش منفی تابع توزیع ویگنر وابسته به زمان کاهش می‌یابد. با محوشدن حجم ناحیه منفی، گذار از مکانیک کوانتومی به کلاسیک روی می‌دهد. این گذار به طور کامل در یک زمان آستانه رخ می‌دهد. این پدیده یعنی گذار کامل از کوانتوم به کلاسیک واهمدوسی نامیده می‌شود. واهمدوسی می‌تواند از طریق برهم کنش محیط حرارتی یا به واسطه اتلاف فوتون‌ها در محیط صورت گیرد. زمان واهمدوسی کامل را به صورت مدت زمان گذار توزیع از بخش منفی به بخش کاملاً مثبت در نظر می‌گیریم. در ادامه، هدف ما تحلیل و بررسی واهمدوسی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده زوج/فرد هنگام برهم کنش با محیط است.

۲- واهمدوسی حالت‌های همدوس زوج/فرد

فوتون - افزوده در کانال اتلاف فوتون

برای توصیف واهمدوسی حالت‌های کوانتومی، تحول زمانی تابع توزیع ویگنر را که مبتنی بر معادله جامع استاندارد است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این معادله در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \left(\frac{\gamma}{N_1 - N_2} \right) N_1 (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \\ & + \left(\frac{\gamma}{N_1 - N_2} \right) N_2 (2\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^{\dagger}) \end{aligned} \quad (3)$$

در اینجا N_1 و N_2 به ترتیب معرف تعداد اتم‌های منبع در حالت پایه و برانگیخته هستند و γ ضریب میرایی نامیده می‌شود. برای حل آسان تر، معادله بالا به معادله‌ای مشابه معادله فوکر-پلانک تبدیل می‌شود. با توجه به ارتباط عملگر ماتریس چگالی و توابع توزیع، به ویژه تابع ویگنر، نشان داده شده است که [۶]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (\gamma z W) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\gamma z^* W) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} (\gamma W) \quad (4)$$

که $z = q + ip$ یک متغیر مختلط است. در حالت خاص و به کمک معادله (۳)، معادله جامع توصیف کننده برهم کنش حالت کوانتومی با محیطی که در دمای صفر قرار دارد، با رابطه زیر داده می‌شود [۶]:

از تغییر متغیرهای $z' + \frac{\alpha}{2} = s$ و $z' - \frac{\alpha}{2} = s'$ از رابطه انتگرالی زیر کمک می‌گیریم:

$$\int d^2v \exp \left(-g |v|^2 + \xi(\alpha^*, v^*)v + \eta(\alpha, v)v^* \right) L_m \left(a |v|^2 + \alpha v^* \right) = \frac{\pi(g-a)^m}{g^{m+1}} \exp \left(\frac{\xi\eta}{g} \right) L_m \left(\frac{a\xi\eta \left(1 \mp \frac{\alpha g}{\eta} \right)}{g(g-a)} \right) \quad (9)$$

بعد از انجام محاسباتی طولانی، شکل نهایی تابع ویگنر وابسته به زمان را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$W(z, \gamma t) = \frac{Y^m}{2\pi X^{m+1} \left(L_m(-|\alpha|^2) e^{|\alpha|^2} \pm L_m(|\alpha|^2) e^{-|\alpha|^2} \right)} \times \left[\exp \left(\frac{-|e^{-\gamma t} \alpha - z|^2 + X |\alpha|^2}{X} \right) \times L_m \left(-\frac{|2e^{-2\gamma t} z + (T - e^{-2\gamma t}) \alpha|^2}{4XY} \right) + \exp \left(\frac{-|e^{-\gamma t} \alpha + z|^2 + X |\alpha|^2}{X} \right) \times L_m \left(-\frac{|2e^{-2\gamma t} z - (T - e^{-2\gamma t}) \alpha|^2}{4XY} \right) \right] \pm \left[\exp \left(\frac{-|z|^2 + e^{-\gamma t} \alpha z^* - e^{-\gamma t} \alpha^* z - Y |\alpha|^2}{X} \right) \times L_m \left(\frac{(Y \alpha + ze^{-\gamma t})(Y \alpha^* - z^* e^{-\gamma t})}{XY} \right) + \exp \left(\frac{-|z|^2 - e^{-\gamma t} \alpha z^* + e^{-\gamma t} \alpha^* z - Y |\alpha|^2}{X} \right) \times L_m \left(\frac{(Y \alpha - ze^{-\gamma t})(Y \alpha^* + z^* e^{-\gamma t})}{XY} \right) \right] \quad (10)$$

که در آن: $X = \frac{1}{2}(T + e^{-2\gamma t})$, $Y = \frac{1}{2}(T - e^{-2\gamma t})$. نمودار این تابع را برای حالت‌های همدوس زوج فوتون-افزوده در شکل (۱) به‌ازای $\alpha = 2i$ و $m=1$ در زمان‌های مختلف رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که با گذشت زمان، از بخش منفی توزیع ویگنر کاسته می‌شود (برای

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \gamma(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \quad (5)$$

تحول زمانی تابع ویگنر مشابه رابطه (۴) است که با استفاده از نمایش حالت درهم‌تنیده حرارتی، تابع ویگنر وابسته به زمان آن به صورت زیر است [۷]:

$$W(z, \gamma t) = \frac{2}{\pi T} \int d^2z' \exp \left(-\frac{2}{T} |z - z' e^{-\gamma t}|^2 \right) \times W(z', 0) \quad (6)$$

که در آن $T = 1 - e^{-\gamma t}$ و منظور از $W(z', 0)$ ، تابع ویگنر اولیه سامانه است. بنابراین، در اولین گام به تابع ویگنر حالت‌های همدوس زوج/فرد در لحظه صفر نیاز داریم که به صورت زیر به دست آمده است [۴]:

$$W(z', 0) = \frac{(-1)^m e^{2|z'|^2}}{\pi \left(L_m(-|\alpha|^2) e^{|\alpha|^2} \pm L_m(|\alpha|^2) e^{-|\alpha|^2} \right)} \times \left\{ L_m(|2z' - \alpha|^2) \exp(|2z' - \alpha|^2) + L_m(|2z' + \alpha|^2) \exp(|2z' + \alpha|^2) \pm \left[L_m((2z' - \alpha)^*(2z' + \alpha)) \exp(-(2z' - \alpha)^*(2z' + \alpha)) \right] \pm \left[L_m((2z' + \alpha)^*(2z' - \alpha)) \exp(-(2z' + \alpha)^*(2z' - \alpha)) \right] \right\} \quad (7)$$

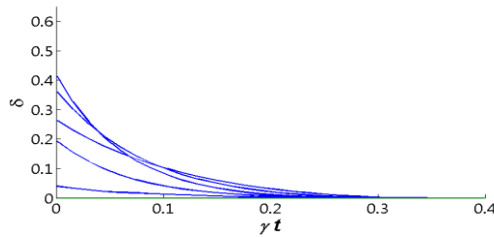
در این رابطه و روابطی که در ادامه به دست می‌آیند، علامت بالا (پایین) مربوط به حالت‌های همدوس زوج (فرد) هستند و $L_m(x)$ چندجمله‌ای لاگر مرتبه m است. با قراردادن رابطه (۷) در (۶)، به عبارتی شامل چهار جمله انتگرالی می‌رسیم که برای حل انتگرال‌های موجود در جمله‌های اول و دوم آن به ترتیب بعد از تغییر متغیرهای $z' - \frac{\alpha}{2} = r$ و $z' + \frac{\alpha}{2} = r'$ ، از فرمول انتگرالی زیر که برای هر متغیری برقرار است، استفاده می‌کنیم [۶]:

$$\int d^2u \exp \left(-g |u|^2 + \xi u + \eta u^* \right) L_m(a |u|^2) = \frac{\pi(g-a)^m}{g^{m+1}} \exp \left(\frac{\xi\eta}{g} \right) L_m \left(\frac{a\xi\eta}{g(g-a)} \right) \quad (8)$$

به همین شکل برای جمله‌های سوم و چهارم به ترتیب بعد

مورد فرد نیز نتیجه‌ای مشابه به دست می‌آید).

گذشت زمان، حجم بخش منفی توزیع ویگنر کاهش می‌یابد و در نهایت به صفر می‌رسد.



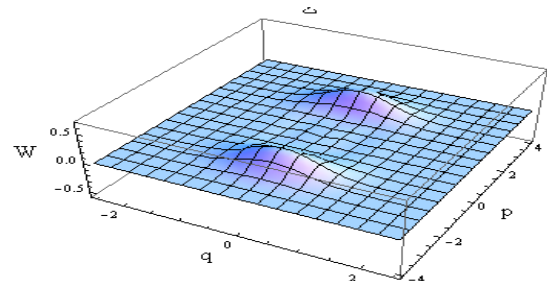
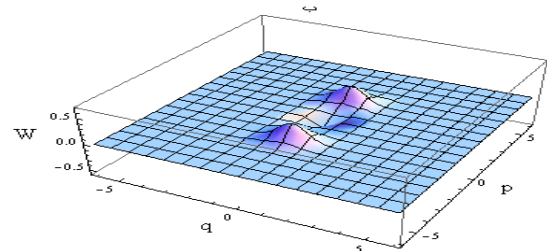
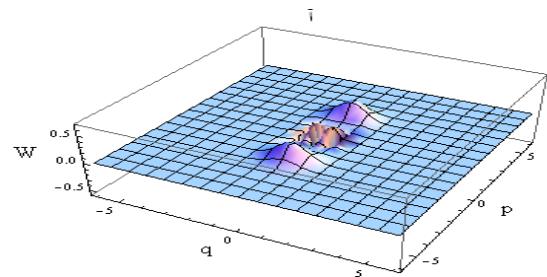
شکل (۲): تحول زمانی حجم بخش منفی توزیع ویگنر برای مقادیر مختلف $m = 3, 2, 1, 4, 0$ متناظر با حالت‌های همدوس زوج فوتون-افزوده (به ترتیب از بالا به پایین).

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله واهمدوسی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده را در کانال اتلاف فوتون با به دست آوردن عبارتی برای تابع ویگنر وابسته به زمان مورد مطالعه قرار دادیم. سپس با رسم نمودار توزیع ویگنر وابسته به زمان در فضای فاز نشان دادیم که در طی برهم‌کنش با محیط و با گذشت زمان، از بخش منفی تابع ویگنر کاسته می‌شود. علاوه بر این، با محاسبه عددی حجم منفی توزیع ویگنر و رسم نمودار مربوط به آن برحسب زمان میرایی، مشاهده شد که با گذشت زمان در نهایت حجم منفی تابع ویگنر به صفر می‌رسد. این درست لحظه‌ای است که واهمدوسی کامل رخ داده‌است. هرچند نتایج محاسبات عددی فقط برای حالت‌های زوج ارائه شد ولی مطابق محاسبات ما، حالت‌های فرد نیز به لحاظ کیفی رفتار مشابهی از خود بروز می‌دهند.

مراجع

- [1] D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger, "The Physics of Quantum Information"; Berlin: Springer (2000).
- [2] A. Kenfack and K. Życzkowski, "Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality", J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, 396-404 (2004).
- [3] G.S. Agarwal, K. Tara, "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state"; Phys. Rev. A **43**, 492-497 (1991).
- [4] V. V. Dodonov and et al., "Nonclassical properties of states generated by the excitation of even/odd coherent states of light"; Quantum Semiclass. Opt. **8**, 413-427 (1996).
- [5] V. V. Dodonov and L. A. de Souza, "Decoherence of superpositions of displaced number states"; J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S490-S499 (2005).
- [6] D. F. Walls and G. J. Milburn, "Quantum Optics"; Springer, (1995).
- [7] H. Y. Fan and L. Y. Hu, "Time evolution of Wigner function in laser process derived by entangled state representation"; Opt. Commun. **282**, 4679-4383 (2009).



شکل (۱): تابع ویگنر وابسته به زمان در فضای فاز برای حالت‌های همدوس زوج فوتون-افزوده به ازای $m = 1, \alpha = 2i$ با $\gamma t = 0.01$: ب، $\gamma t = 0.06$ و $\gamma t = 0.15$.

۳- حجم بخش منفی تابع ویگنر

منفی بودن تابع ویگنر مشخصه خوبی برای تعیین کمی غیرکلاسیکی بودن هر حالت کوانتومی است. به منظور بررسی این ویژگی، حجم بخش منفی تابع توزیع ویگنر به این صورت تعریف شده‌است [۲]:

$$\delta = \frac{1}{2} \iint dq dp (|W(q, p, \gamma t)| - W(q, p, \gamma t)) \quad (11)$$

اگر $\delta = 0$ ، توزیع ویگنر در کل فضای فاز مثبت است و اگر $\delta > 0$ ، توزیع ویگنر در قسمت‌هایی از فضای فاز منفی است. بنابراین می‌توان از مثبت بودن δ به عنوان شرطی برای دارا بودن رفتار غیرکلاسیکی استفاده کرد. به طور مثال، این کمیت برای حالت همدوس صفر است، زیرا توزیع ویگنر این حالت کاملاً مثبت است. در شکل (۲) نمودار δ برحسب γt به ازای $\alpha = 0.8i$ و برای مقادیر مختلف m رسم شده‌است. مشاهده می‌شود که با