بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

واهمدوسی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون- افزوده در کانال اتلاف فوتون

آرزو محمدبیگی[۱] و محمد کاظم توسلی[۱و۲]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله اثر واهمدوسی را روی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بدین منظور، تابع ویگنر وابسته به زمان این حالت‌ها را در چارچوب معادله جامع استاندارد به هنگام برهم‌کنش با محیط در دمای صفر (که کانال اتلاف فوتون نامیده می‌شود) به‌دست می‌آوریم. سپس با تجزیه و تحلیل تحول زمانی توزیع ویگنر حالت‌های مذکور، اتلاف رفتار غیرکلاسیکی را به‌صورت نتیجه‌ای از واهمدوسی نشان می‌دهیم.

کلید واژه- تابع ویگنر، حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده، زمان میرایی، واهمدوسی.

Decoherence of Photon-added Even/Odd Coherent States in Photon-loss Channel

Arezoo Mohammadbeigi [1] and Mohammad Kazem Tavassoly[1, 2]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
[2] Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper we study the effect of decoherence on the photon-added even/odd coherent states. For this purpose, the time-dependent Wigner function of the considered states during their interaction with the environment in zero temperature (that is called photon-loss channel) is obtained in the framework of standard master equation. Then, by analyzing the evolution of Wigner distribution of the mentioned states, the loss of nonclassicality behavior as a result of decoherence is clearly shown.

Keywords: Decay time, Decoherence, Photon-added even/odd coherent states, Wigner function.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

۱- مقدمه

میدان‌های تابشی غیرکلاسیکی در پردازش اطلاعات کوانتومی کاربرهای زیادی دارند [۱]. غیرکلاسیکی‌بودن با رفتارهای ویژه‌ای از آمار کوانتومی میدان مانند منفی‌شدن تابع ویگنر در بخش‌هایی از فضای فاز، چلاندگی، آمار زیرپواسونی و ... مشخص می‌شود. در این میان منفی‌شدن تابع ویگنر به‌عنوان یک معیار غیرکلاسیکی میدان‌های نوری به‌طور ویژه مورد توجه قرار گرفته‌است[۲]. از روش‌های متعددی که برای به‌دست آوردن حالت‌های غیرکلاسیکی پیشنهاد شده‌است، می‌توان به حالت‌های همدوس فوتون-افزوده که به‌صورت $\hat{a}^{\dagger m}\,|\alpha\rangle$ معرفی شده‌اند [۳] اشاره کرد. هم‌چنین نوع جدیدی از حالت‌های غیرکلاسیکی معرفی شده‌اند که با اعمال مکرر عملگر آفرینش روی حالت‌های همدوس زوج/فرد به‌دست می‌آیند و حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده نامیده شدند [۴]. بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی، مانند چلاندگی، پارامتر مندل و ... برای این حالت‌ها نشان داده‌است که حالت‌های مذکور نسبت به حالت‌های همدوس رفتار غیرکلاسیکی قابل‌توجهی دارند [۴]. حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون-افزوده به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$|\alpha_{\pm}, m\rangle = N\left(\hat{a}^{\dagger m}\,|\alpha_{\pm}\rangle\right) \qquad (۱)$$

که m یک عدد صحیح نامنفی است و $\hat{a}^{\dagger}$ عملگر آفرینش فوتونی است. $|\alpha_{\pm}\rangle$ به‌ترتیب بیانگر حالت‌های همدوس زوج و فرد به‌صورت زیر هستند:

$$|\alpha_{\pm}\rangle = N_{\pm}\left(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle\right) \qquad (۲)$$

در این رابطه N و $N_{\pm}$ در (۱) و (۲) ضرایب بهنجارش هستند. در بیشتر کاربردهای مکانیک کوانتومی، طبیعت اطلاعات پردازش‌شده حالت‌های غیرکلاسیکی نیازمند حفظ و نگهداری است. اساساً این ویژگی‌ها برای سامانه‌های منزوی ماندگار هستند. اما به‌ندرت اتفاق می‌افتد که سامانه کوانتومی منزوی باشد و اصولاً برهم‌کنش سامانه با محیط اطرافش، باعث میرایی رفتار غیرکلاسیکی حالت مورد نظر می‌شود.

منفی‌شدن تابع شبه‌توزیع ویگنر شاهدی قوی برای تبیین رفتار غیرکلاسیکی حالت سامانه است. با بررسی تابع ویگنر وابسته به زمان می‌توان میرایی رفتار غیرکلاسیکی را مورد مطالعه قرار داد. در طی برهم‌کنش سامانه با محیط اطرافش، بخش منفی تابع توزیع ویگنر وابسته به زمان کاهش می‌یابد. با محوشدن حجم ناحیه منفی، گذار از مکانیک کوانتومی به کلاسیک روی می‌دهد. این گذار به‌طور کامل در یک زمان آستانه رخ می‌دهد. این پدیده یعنی گذار کامل از کوانتوم به کلاسیک واهمدوسی نامیده می‌شود. واهمدوسی می‌تواند از طریق برهم‌کنش محیط حرارتی یا به‌واسطه اتلاف فوتون‌ها در محیط صورت گیرد. زمان واهمدوسی کامل را به‌صورت مدت‌زمان گذار توزیع از بخش منفی به بخش کاملاً مثبت در نظر می‌گیریم. در ادامه، هدف ما تحلیل و بررسی واهمدوسی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده زوج/فرد هنگام برهم‌کنش با محیط است.

۲- واهمدوسی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون- افزوده در کانال اتلاف فوتون

برای توصیف واهمدوسی حالت‌های کوانتومی، تحول زمانی تابع توزیع ویگنر را که مبتنی بر معادله جامع استاندارد است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این معادله در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} &= \left(\frac{\gamma}{N_1-N_2}\right) N_1\,(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \\ &+\left(\frac{\gamma}{N_1-N_2}\right) N_2\,(2\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}\hat{a}-\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger})\end{aligned} \qquad (۳)$$

در اینجا N_1 و N_2 به‌ترتیب معرف تعداد اتم‌های منبع در حالت پایه و برانگیخته هستند و γ ضریب میرایی نامیده می‌شود. برای حل آسان‌تر، معادله بالا به معادله‌ای مشابه معادله فوکر-پلانک تبدیل می‌شود. با توجه به ارتباط عملگر ماتریس چگالی و توابع توزیع، به‌ویژه تابع ویگنر، نشان داده شده‌است که [۶]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\gamma z W) + \frac{\partial}{\partial z^{*}}(\gamma z^{*} W) + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z^{*}}(\gamma W) \qquad (۴)$$

که $z = q + ip$ یک متغیر مختلط است. در حالت خاص و به‌کمک معادله (۳)، معادله جامع توصیف‌کننده برهم‌کنش حالت کوانتومی با محیطی که در دمای صفر قرار دارد، با رابطه زیر داده می‌شود [۶]:

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=\gamma(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}-\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) \qquad (۵)$$

تحول زمانی تابع ویگنر مشابه رابطه (۴) است که با استفاده از نمایش حالت درهم‌تنیده حرارتی، تابع ویگنر وابسته به زمان آن به‌صورت زیر است [۷]:

$$W(z,\gamma t)=\frac{2}{\pi T}\int d^{2}z'\exp\left(-\frac{2}{T}\left|z-z'e^{-\gamma t}\right|^{2}\right)\times W(z',0) \qquad (۶)$$

که در آن $T=1-e^{-\gamma t}$ و منظور از $W(z',0)$، تابع ویگنر اولیه سامانه است. بنابراین، در اولین گام به تابع ویگنر حالت‌های همدوس زوج/فرد در لحظه صفر نیاز داریم که به‌صورت زیر به‌دست آمده است [۴]:

$$W(z',0)=\frac{(-1)^{m}e^{2|z'|^{2}}}{\pi\left(L_{m}(-|\alpha|^{2})e^{|\alpha|^{2}}\pm L_{m}(|\alpha|^{2})e^{-|\alpha|^{2}}\right)}\times\Big\{L_{m}\left(|2z'-\alpha|^{2}\right)\exp\left(|2z'-\alpha|^{2}\right)+L_{m}\left(|2z'+\alpha|^{2}\right)\exp\left(|2z'+\alpha|^{2}\right)\pm\Big[L_{m}\left((2z'-\alpha)^{*}(2z'+\alpha)\right)\exp\left(-(2z'-\alpha)^{*}(2z'+\alpha)\right)\Big]\pm\Big[L_{m}\left((2z'+\alpha)^{*}(2z'-\alpha)\right)\exp\left(-(2z'+\alpha)^{*}(2z'-\alpha)\right)\Big]\Big\} \qquad (۷)$$

در این رابطه و روابطی که در ادامه به‌دست می‌آیند، علامت بالا (پایین) مربوط به حالت‌های همدوس زوج (فرد) هستند و $L_{m}(x)$ چندجمله‌ای لاگر مرتبه m است. با قراردادن رابطه (۷) در (۶)، به عبارتی شامل چهار جمله انتگرالی می‌رسیم که برای حل انتگرال‌های موجود در جمله‌های اول و دوم آن به‌ترتیب بعد از تغییرمتغیرهای $z'-\frac{\alpha}{2}=r$ و $z'+\frac{\alpha}{2}=r'$، از فرمول انتگرالی زیر که برای هر متغیری برقرار است، استفاده می‌کنیم [۶]:

$$\int d^{2}u\exp\left(-g|u|^{2}+\xi u+\eta u^{*}\right)L_{m}\left(a|u|^{2}\right)=\frac{\pi(g-a)^{m}}{g^{m+1}}\exp\left(\frac{\xi\eta}{g}\right)L_{m}\left(\frac{a\xi\eta}{g(g-a)}\right) \qquad (۸)$$

به‌همین شکل برای جمله‌های سوم و چهارم به‌ترتیب بعد از تغییرمتغیرهای $z'+\frac{\alpha}{2}=s$ و $z'-\frac{\alpha}{2}=s'$ از رابطه انتگرالی زیر کمک می‌گیریم:

$$\int d^{2}v\exp\left(-g|v|^{2}+\xi(\alpha^{*},v^{*})v+\eta(\alpha,v)v^{*}\right)L_{m}\left(a(|v|^{2}\mp\alpha v^{*})\right)=\frac{\pi(g-a)^{m}}{g^{m+1}}\exp\left(\frac{\xi\eta}{g}\right)L_{m}\left(\frac{a\xi\eta\left(1\mp\frac{\alpha g}{\eta}\right)}{g(g-a)}\right) \qquad (۹)$$

بعد از انجام محاسباتی طولانی، شکل نهایی تابع ویگنر وابسته به زمان را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

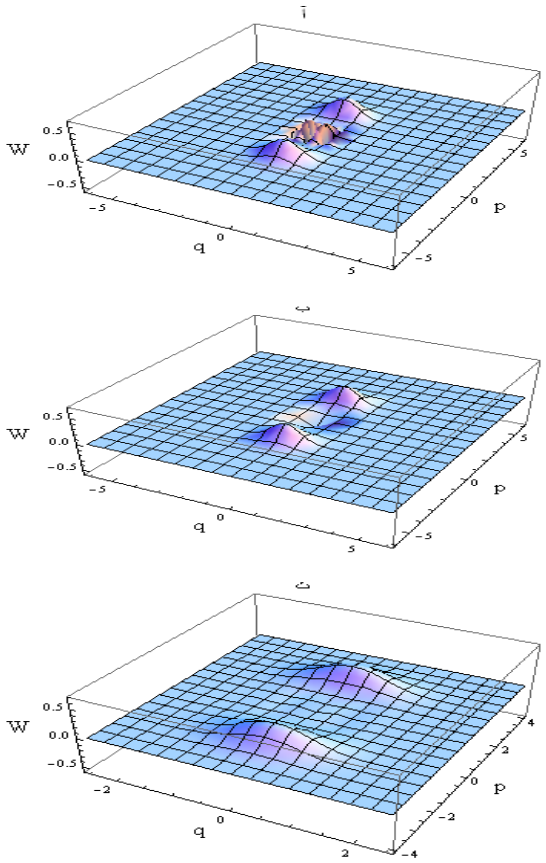
$$W(z,\gamma t)=\frac{Y^{m}}{2\pi X^{m+1}\left(L_{m}\left(-|\alpha|^{2}\right)e^{|\alpha|^{2}}\pm L_{m}\left(|\alpha|^{2}\right)e^{-|\alpha|^{2}}\right)}\times\Big\{\Big[\exp\left(\frac{-|e^{-\gamma t}\alpha-z|^{2}+X|\alpha|^{2}}{X}\right)\times L_{m}\left(-\frac{|2e^{-2\gamma t}z+(T-e^{-2\gamma t})\alpha|^{2}}{4XY}\right)\Big]+\Big[\exp\left(\frac{-|e^{-\gamma t}\alpha+z|^{2}+X|\alpha|^{2}}{X}\right)L_{m}\left(-\frac{|2e^{-2\gamma t}z-(T-e^{-2\gamma t})\alpha|^{2}}{4XY}\right)\Big]\pm\Big[\exp\left(\frac{-|z|^{2}+e^{-\gamma t}\alpha z^{*}-e^{-\gamma t}\alpha^{*}z-Y|\alpha|^{2}}{X}\right)L_{m}\left(\frac{(Y\alpha+ze^{-\gamma t})(Y\alpha^{*}-z^{*}e^{-\gamma t})}{XY}\right)\Big]\pm\Big[\exp\left(\frac{-|z|^{2}-e^{-\gamma t}\alpha z^{*}+e^{-\gamma t}\alpha^{*}z-Y|\alpha|^{2}}{X}\right)L_{m}\left(\frac{(Y\alpha-ze^{-\gamma t})(Y\alpha^{*}+z^{*}e^{-\gamma t})}{XY}\right)\Big]\Big\} \qquad (۱۰)$$

که در آن: $X=\frac{1}{2}(T+e^{-2\gamma t})$, $Y=\frac{1}{2}(T-e^{-2\gamma t})$.

نمودار این تابع را برای حالت‌های همدوس زوج فوتون‌افزوده در شکل (۱) به‌ازای $\alpha=2i$ و $m=1$ در زمان‌های مختلف رسم کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که با گذشت زمان، از بخش منفی توزیع ویگنر کاسته می‌شود (برای

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

مورد فرد نیز نتیجه‌ای مشابه به‌دست می‌آید.).



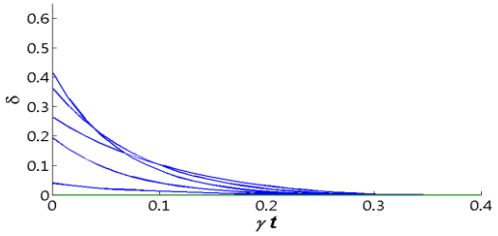
شکل (۱): تابع ویگنر وابسته به زمان در فضای فاز برای حالت‌های همدوس زوج فوتون-افزوده به ازای $m=1$، $\alpha=2i$ با آ: $\gamma t=0.01$، ب: $\gamma t=0.06$ و پ: $\gamma t=0.15$.

۳- حجم بخش منفی تابع ویگنر

منفی‌بودن تابع ویگنر مشخصه خوبی برای تعیین کمی غیرکلاسیکی بودن هر حالت کوانتومی است. به‌منظور بررسی این ویژگی، حجم بخش منفی تابع توزیع ویگنر به این صورت تعریف شده‌است [۲]:

$$\delta=\frac{1}{2}\iint dq\,dp\,\left(|W(q,p,\gamma t)|-W(q,p,\gamma t)\right) \quad (۱۱)$$

اگر $\delta=0$، توزیع ویگنر در کل فضای فاز مثبت است و اگر $\delta>0$، توزیع ویگنر در قسمت‌هایی از فضای فاز منفی است. بنابراین می‌توان از مثبت‌بودن δ به‌عنوان شرطی برای دارابودن رفتار غیرکلاسیکی استفاده کرد. به‌طور مثال، این کمیت برای حالت همدوس صفر است، زیرا توزیع ویگنر این حالت کاملاً مثبت است. در شکل (۲) نمودار δ برحسب γt به‌ازای $\alpha=0.8i$ و برای مقادیر مختلف m رسم شده‌است. مشاهده می‌شود که با گذشت زمان، حجم بخش منفی توزیع ویگنر کاهش می‌یابد و در نهایت به صفر می‌رسد.



شکل (۲): تحول زمانی حجم بخش منفی توزیع ویگنر برای مقادیر مختلف $m=3,2,1,4,0$ متناظر با حالت‌های همدوس زوج فوتون-افزوده (به‌ترتیب از بالا به پایین).

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله واهمدوسی حالت‌های همدوس زوج/فرد فوتون- افزوده را در کانال اتلاف فوتون با به‌دست آوردن عبارتی برای تابع ویگنر وابسته به زمان مورد مطالعه قرار دادیم. سپس با رسم نمودار توزیع ویگنر وابسته به زمان در فضای فاز نشان دادیم که در طی برهم‌کنش با محیط و با گذشت زمان، از بخش منفی تابع ویگنر کاسته می‌شود. علاوه بر این، با محاسبه عددی حجم منفی توزیع ویگنر و رسم نمودار مربوط به آن برحسب زمان میرایی، مشاهده شد که با گذشت زمان در نهایت حجم منفی تابع ویگنر به صفر می‌رسد. این درست لحظه‌ای است که واهمدوسی کامل رخ داده‌است. هرچند نتایج محاسبات عددی فقط برای حالت‌های زوج ارائه شد ولی مطابق محاسبات ما، حالت‌های فرد نیز به‌لحاظ کیفی رفتار مشابهی از خود بروز می‌دهند.

مراجع

[1] D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger, "*The Physics of Quantum Information*"; Berlin: Springer (2000).

[2] A. Kenfack and K. Zyczkowski, "*Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality*", J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6**, 396-404 (2004).

[3] G.S. Agarwal, K. Tara, "*Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state*"; Phys. Rev. A **43**, 492-497 (1991).

[4] V. V. Dodonov and et al., "*Nonclassical properties of states generated by the excitation of even/odd coherent states of light*"; Quantum Semiclass. Opt. **8**, 413–427 (1996).

[5] V. V. Dodonov and L. A. de Souza, "*Decoherence of superpositions of displaced number states*"; J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S490–S499 (2005).

[6] D. F. Walls and G. J. Milburn, "*Quantum Optics*"; Springer, (1995).

[7] H. Y. Fan and L. Y. Hu, "*Time evolution of Wigner function in laser process derived by entangled state representation*"; Opt. Commun. **282**, 4679-4383 (2009).

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]