



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



رهیافتی هندسی برای محاسبه‌ی هم‌بستگی کوانتومی

سید جواد اخترشناس^{۱،۲،۳}، حمیدرضا محمدی^{۱،۲،۳}، سامان کریمی^۱ و زهرا عزمی^۱

^۱گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

^۲گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

^۳گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده - حالت کلی سامانه‌ی $m \otimes n$ ، حالتی کلاسیکی- کوانتومی است اگر و تنها اگر مرتبه ماتریس چپ-هم‌بستگی مربوط به آن بزرگ‌تر از $m-1$ نباشد. بر اساس این شرط، سنجه‌ای قابل محاسبه برای ناهم‌خوانی کوانتومی ارائه شده است که منطبق بر کران پایین محکم سنجه‌ی هندسی ناهم‌خوانی است. بنابراین این حد پایین محکم، کاملاً هم‌بستگی کوانتومی را در بر می‌گیرد و خود می‌تواند به عنوان سنجه‌ای برای ناهم‌خوانی استفاده شود. از این رو صفر شدن کران پایین محکم ناهم‌خوانی هندسی، شرط لازم و کافی برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌های کوانتومی است.

کلید واژه- حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی، ماتریس چپ-هم‌بستگی، ناهم‌خوانی کوانتومی، هم‌بستگی کوانتومی.

A Geometrical Approach to Quantum Correlation

S. Javad Akhtarshenas^{1,2,3}, Hamidreza Mohammadi^{1,2}, Saman Karimi¹ and Zahra Azmi¹

¹Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

²Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan

³Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract- A general state of an $m \otimes n$ system is a classical-quantum state if and only if its associated left-correlation matrix has rank no larger than $m-1$. Based on this condition, a computable measure of quantum discord is presented, which coincides with the tight lower bound on the geometric measure of discord. Therefore such obtained tight lower bound fully captures the quantum correlation of a bipartite system, so it can be used as a measure of discord in its own right. Accordingly, a vanishing tight lower bound on the geometric discord is a necessary and sufficient condition for a state to be zero-discord.

Keywords: classical-quantum states, left-correlation matrix, quantum discord, quantum correlation.

۱- مقدمه

ناهم خوانی کوانتومی معیاری برای سنجش میزان همبستگی کوانتومی نهفته در یک سامانه کوانتومی است که از زاویه‌ی جدیدی به همبستگی‌ها می‌نگرد. در حقیقت ناهم خوانی کوانتومی میزان همبستگی نهفته در یک سامانه را با استفاده از مفهوم اندازه‌گیری و اطلاعات قابل حصول پس از اندازه‌گیری می‌سنجد و بنابراین تفاوت اساسی با معیار دیگر همبستگی کوانتومی یعنی درهم‌تنیدگی دارد [۱ و ۲]. نشان داده شده است که حالت‌های جدایی‌پذیری (غیردرهم‌تنیده‌ای) وجود دارند که ناهم خوانی غیر صفر دارند و این حالت‌های جدایی‌پذیر را می‌توان به عنوان منبعی برای بالا بردن کیفیت مخابرات کوانتومی و سرعت بخشیدن به فرآیندهای محاسبات کوانتومی به کار برد [۳ و ۴]. از آنجا که اغلب سامانه‌های مورد استفاده در مخابرات و نیز در رایانه‌های کوانتومی که از سامانه‌های فوتونیک استفاده می‌کنند را می‌توان با فضای هیلبرت با ابعاد متناهی بزرگ مدل‌سازی نمود، لذا معرفی سنج‌های برای سنجش همبستگی‌های کوانتومی در چنین سامانه‌هایی حائز اهمیت می‌باشد. در میان سنج‌های گوناگون ناهم خوانی کوانتومی، ناهم خوانی هندسی که در ابتدا توسط داکیک و همکارانش پیشنهاد شد، سنج‌های ساده و قابل اندازه‌گیری برای همبستگی‌های غیر کلاسیکی می‌باشد [۵]. ناهم خوانی هندسی به صورت فاصله‌ی هیلبرت-اشمیت بین حالت سامانه‌ی کوانتومی و نزدیک‌ترین حالت با ناهم خوانی صفر تعریف می‌شود. برای یک حالت دو قسمتی ρ روی فضای هیلبرت $H^A \otimes H^B$ ، ناهم خوانی هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$D_G(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|^2, \quad (1)$$

که در آن Ω_0 نشان دهنده‌ی مجموعه حالت‌های با ناهم خوانی صفر و $\|X - Y\|^2 = \text{Tr}[(X - Y)(X - Y)^\dagger]$ نرم هیلبرت-اشمیت است. این کمیت برای حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی صفر می‌شود. داکیک و همکارانش همچنین با استفاده از نمایش هیلبرت-اشمیت فرمول‌بندی بسته‌ای برای ناهم خوانی هندسی حالت‌های دوکیوبیتی دلخواه برحسب بردارهای همدوس و ماتریس همبستگی حالت به دست آوردند. تاکنون ناهم خوانی هندسی برای حالت‌های دلخواه $2 \otimes n$ و برخی حالت‌های

خاص $m \otimes m$ مانند حالت‌های ورنر و حالت‌های همسانگرد (ایزوتروپیک) محاسبه شده است. لو و فو شکل هم‌ارز دیگری را برای ناهم خوانی هندسی که مبتنی بر اندازه‌گیری است به صورت زیر معرفی نمودند [۶]:

$$D_G(\rho) = \min_{\Pi^A} \|\rho - \Pi^A(\rho)\|^2, \quad (2)$$

که در آن، کمینه‌سازی بر روی تمامی اندازه‌گیری‌های فون‌نویمن $\Pi^A = \{\Pi_k^A\}_{k=1}^m$ انجام شده است. در این معادله $\Pi^A(\rho) = \sum_{k=1}^m (\Pi_k^A \otimes I^B) \rho (\Pi_k^A \otimes I^B)$ حالت پس از اندازه‌گیری است. نمایش کلی حالت یک سامانه دو بخشی $m \otimes n$ در نمایش هیلبرت-اشمیت به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{1}{mn} \left(I \otimes I + \bar{x} \otimes \hat{\lambda}^A \otimes I + I \otimes \bar{y} \otimes \hat{\lambda}^B + \sum_{i=1}^{m^2-1} \sum_{j=1}^{n^2-1} t_{ij} \hat{\lambda}_i^A \otimes \hat{\lambda}_j^B \right). \quad (3)$$

که در آن، $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{m^2-1})^t$ و $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n^2-1})^t$ به ترتیب بردارهای همدوس زیر سامانه‌های A و B می‌باشند:

$$x_i = \frac{m}{2} \text{Tr}[(\hat{\lambda}_i^A \otimes I) \rho], y_j = \frac{n}{2} \text{Tr}[(I \otimes \hat{\lambda}_j^B) \rho], \quad (4)$$

$T = (t_{ij})$ نیز ماتریس همبستگی است:

$$t_{ij} = \frac{mn}{4} \text{Tr}[(\hat{\lambda}_i^A \otimes \hat{\lambda}_j^B) \rho]. \quad (5)$$

در اینجا $\{X_i\}_{i=0}^{m^2-1}$ و $\{Y_j\}_{j=0}^{n^2-1}$ به ترتیب مولدهای جبر $SU(m)$ و $SU(n)$ هستند، این عملگرها هرمیتی و متعامد بهنجار هستند. رانا و همکارانش [۷] و بطور مستقل حسن و همکارانش [۸] با استفاده از نمایش هیلبرت-اشمیت برای یک حالت دو قسمتی کلی ρ بر فضای هیلبرت دو بخشی $m \otimes n$ ، یک کران پایین برای ناهم خوانی هندسی به صورت زیر تعریف نمودند.

$$D_G(\rho) \geq \frac{2}{m^2 n} \left(\|\bar{x}\|^2 + \frac{2}{n} \|\bar{y}\|^2 - \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k^\downarrow \right) = \frac{2}{m^2 n} \sum_{k=m}^{m^2-1} \eta_k^\downarrow, \quad (6)$$

که $\eta_k^\downarrow$ ویژه مقادیر ماتریس $G := \bar{x} \bar{x}^t + \frac{2}{n} T T^t$ هستند که به ترتیب غیرافزایشی مرتب شده‌اند. از آنجایی که این کران پایین برای حالت‌های $m \otimes m$ ورنر و

آیزوتروپیک و همچنین برای حالت‌های دلخواه $2 \otimes n$ ، با ناهم‌خوانی هندسی منطبق می‌شود، این کران یک کران محکم برای ناهم‌خوانی هندسی است.

براساس مرتبه ماتریس هم‌بستگی، داکیک و همکارانش [۵]، شرط لازم برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌های دوقسمتی دلخواه معرفی نمودند. پس از آن شرط لازم و کافی برای صفر بودن ناهم‌خوانی حالت‌های دوکیوبیتی توسط لو و همکارانش ارائه شد [۹]. شرط آن‌ها وجود یک بردار واحد $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ که شرایط زیر را ارضاء می‌کند، است:

$$\hat{n}\hat{n}^t \bar{x} = \bar{x}, \quad \hat{n}\hat{n}^t T = T, \quad (۷)$$

که $\bar{x}$ بردار هم‌دوس زیرسامانه‌ی A و T ماتریس هم‌بستگی ρ در نمایش بلوخ می‌باشد. از این رو یک حالت دوکیوبیتی، ناهم‌خوانی صفر دارد اگر و تنها اگر $T = 0$ باشد یا $rank(T) = 1$ و $\bar{x}$ متعلق به برد T باشد.

در این مقاله ابتدا تعمیمی برای معادله (۷) ارائه می‌شود و بر اساس آن با تعریف ماتریس چپ-همبستگی شرط لازم و کافی برای صفر بودن ناهم‌خوانی یک سیستم دلخواه $m \otimes n$ ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از آن روشی هندسی برای تعیین مقادیر ناهم‌خوانی کوانتومی پیشنهاد می‌کنیم. بهینه‌سازی موجود در تعریف را می‌توان به طور تحلیلی حل کرد و این منجر به شکلی بسته برای ناهم‌خوانی هندسی می‌شود. نکته جالب اینجا است که این مقیاس ناهم‌خوانی با کران پایین محکم بر ناهم‌خوانی هندسی که در معادله‌ی (۶) معرفی شد، منطبق می‌باشد. بدان معنا که کران پایین معرفی شده در معادله (۶) خود می‌تواند سنج‌ای برای سنجش هم‌بستگی کوانتومی نهفته در سامانه‌های کوانتومی باشد.

۲- توصیف حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی

در این بخش شرط لازم و کافی معرفی شده در معادله (۷) را به سامانه‌های با ابعاد بالاتر تعمیم می‌دهیم و بر این اساس در بخش بعدی بر اساس آن یک سنج هندسی جدید برای ناهم‌خوانی کوانتومی معرفی می‌کنیم. اینک توجه‌مان را به حالت دوقسمتی ρ روی فضای $H^A \otimes H^B$ معطوف کرده و مجموعه حالت‌های ناهم‌خوانی صفر را بررسی می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱: حالت دوقسمتی ρ بر $H^A \otimes H^B$ حالتی با ناهم‌خوانی چپ صفر است، یعنی حالتی کلاسیکی-کوانتومی است اگر و تنها اگر عملگر برافکنشی R^{m^2-1} بعدی P بر فضای (m^2-1) بعدی وجود داشته باشد به طوری که روابط زیر برقرار باشند:

$$P\bar{x} = \bar{x}, \quad PT = T, \quad (۱۲)$$

در آن، $\bar{x}$ بردار هم‌دوس بخش A و T ماتریس هم‌بستگی ρ می‌باشد. (برای اثبات به مرجع [۱۰] رجوع شود). شرایط (۱۲) را می‌توان به شکل خلاصه‌ی زیر نوشت:

$$PT = T, \quad (۱۳)$$

که در آن، T ماتریسی $n^2 \times (m^2-1)$ بعدی است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T = \sqrt{\frac{2}{m^2n}} \left(\bar{x} \sqrt{\frac{2}{n}} T \right). \quad (۱۴)$$

چون T شامل بردار هم‌دوس $\bar{x}$ زیرسامانه‌ی A و ماتریس هم‌بستگی T سامانه‌ی دوقسمتی $A-B$ می‌شود، ما T را ماتریس چپ-هم‌بستگی حالت ρ می‌نامیم.

به عنوان مثال مورد سامانه‌ی دوکیوبیتی را بررسی می‌کنیم. در این مورد، حالت کلی ناهم‌خوانی صفر χ توسط $T = \hat{n}(p_1\vec{\xi}_1 - p_2\vec{\xi}_2)^t$ و $\bar{y} = (p_1\vec{\xi}_1 + p_2\vec{\xi}_2)$ ، $\bar{x} = (p_1 - p_2)\hat{n}$ مشخص می‌شود که در آن‌ها p_1 و p_2 احتمال‌هایی با شرط $p_1 + p_2 = 1$ و $\hat{n}$ بردار واحد است و $\vec{\xi}_1$ و $\vec{\xi}_2$ بردارهای هم‌دوس زیر سامانه‌ی B می‌باشند. آشکار است که شرط ناهم‌خوانی صفر معادله‌ی (۷) ارضاء می‌شود. در زیر نشان می‌دهیم که قضیه‌ی بالا را می‌توان به عنوان شرطی لازم و کافی برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌های دوقسمتی به کار برد.

نتیجه: حالت دوقسمتی ρ حالتی کلاسیکی-کوانتومی، یعنی حالتی با ناهم‌خوانی صفر است اگر و تنها اگر $rank(TT^t) \leq m-1$ باشد.

۳- تعیین کمیت ناهم‌خوانی کوانتومی

قضیه‌ی ۱ به ما توانایی معرفی سنج‌ی جدیدی برای

$$I_P(\rho) = \|T\|^2 = \sum_{k=1}^{m^2-1} \tau_k^\downarrow, C_P(\rho) = \max_P \|PT\|^2 = \sum_{k=1}^{m^2-1} \tau_k^\downarrow. \quad (19)$$

از این رو سنجی همبستگی کوانتومی به صورت زیر

$$D_P(\rho) = I_P(\rho) - C_P(\rho). \quad \text{می باشد:}$$

اینک برخی ویژگی‌های سنجی ناهمخوانی بالا را بیان می‌کنیم. (i) سنجی ناهمخوانی بالا تنها برای حالت‌هایی با ناهمخوانی صفر، صفر می‌شود. (ii) برای حالت با

بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m |ii\rangle$ رابطه‌ی

$$D_P(\rho) = D_G(\rho) = \frac{m-1}{m}$$

برای این کمیت‌ها می‌دهد. (iii) $D_P(\rho)$ تحت تبدیلات

یکانی محلی U_1 و U_2 که به ترتیب بر H^A و H^B انجام

می‌شود، ناورداست یعنی اگر $U_1 \in SU(m)$ و $U_2 \in SU(n)$

$$D_P((U_1 \otimes U_2)\rho(U_1 \otimes U_2)^t) = D_P(\rho) \quad [10]$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله سنجی ناهمخوانی برای همبستگی حالت‌های دو قسمتی $m \otimes n$ ارائه دادیم. ابتدا شرط لازم و کافی برای این که حالت دارای ناهمخوانی صفر باشد ارائه نمودیم. سپس بر این اساس یک سنجی هندسی جدید برای ناهمخوانی کوانتومی معرفی نمودیم.

سپاسگزاری

نویسندگان از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان سپاس‌گزاری می‌نمایند.

مراجع

- [1] H. Olivier and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001)
- [2] L. Henderson, and V. Vedral, *J. Phys. A* **34**, 6899 (2001).
- [3] T. S. Cubitt, F. Verstraete, W. Dur, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 037902, (2003).
- [4] B. Dakic, Y. Ole Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, P. Walther, *arxiv:quant-ph*, 1203.1629 (2012).
- [5] B. Dakic, V. Vedral, and C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190502 (2010).
- [6] S. Luo, and S. Fu, *Phys. Rev. A* **82**, 034302 (2010).
- [7] S. Luo, and S. Fu, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 120401 (2011).
- [8] S. Rana, P. Parashar, *Phys. Rev. A* **85**, 024102 (2012).
- [9] A. S. M. Hassan, B. Lari, and P. S. Joag, *Phys. Rev. A* **85**, 024302 (2012).
- [10] Xiao-Ming Lu, Jian Ma, Zhengjun Xi and Xiaoguang Wang, *Phys. Rev. A* **83**, 012327 (2011).
- [11] S. J. Akhtarshenas, H. Mohammadi, S. Karimi, Z. Azmi, "Tight Lower Bound on the Geometric Discord: A Measure of the Quantumness," arXiv:1303.5570v2.

ناهمخوانی کوانتومی می‌دهد. چون شرط (۱۳)، شرط لازم و کافی برای ناهمخوانی صفر بودن حالت‌ها می‌باشد، پس اندازه‌گیری هر انحراف از این شرایط را می‌توان برای تعیین کمیت ناهمخوانی استفاده کرد.

گزاره: برای حالت دو قسمتی ρ با ماتریس چپ-همبستگی T سنجی جدید زیر را برای ناهمخوانی کوانتومی پیشنهاد می‌کنیم:

$$D_P(\rho) = \min_P \|T - PT\|^2 = \frac{2}{m n} \min \left\{ \|\bar{x} - P\bar{x}\| + \frac{2}{n} \|T - PT\| \right\}, \quad (15)$$

که در آن، $\|\cdot\|^2$ می‌تواند هر نرم منطقی بر فضای حالت‌ها باشد و عمل کمینه‌یابی بر روی سراسر عملگرهای براکشنی $(m-1)$ بعدی P روی m^2-1 گرفته شده است. در اینجا ما $\|\cdot\|^2$ را نرم هیلبرت-اشمیت در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در زیر نشان خواهیم داد کمینه‌سازی موجود در تعریف بالا حلی دقیق برای حالت‌های $m \otimes n$ دلخواه دارد که عبارتی بسته برای ناهمخوانی می‌دهد. براحتی می‌توان نشان داد که:

$$T T^t = \frac{2}{m^2 n} \left(\bar{x} \bar{x}^t + \frac{2}{n} T T^t \right) = \frac{2}{m^2 n} G. \quad (16)$$

و پس از انجام کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$D_P(\rho) = \left[\text{Tr}(T T^t) - \max_{\{\hat{n}_i\}} \text{Tr} \sum_{i=1}^{m-1} \hat{n}_i^t (T T^t) \hat{n}_i \right] = \left[\text{Tr}(T T^t) - \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k^\downarrow \right] = \sum_{k=m}^{m^2-1} \tau_k^\downarrow, \quad (17)$$

در آن $\{\tau_k^\downarrow\}_{k=1}^{m^2-1}$ ویژه مقادیر $T T^t$ به ترتیب غیرافزایشی می‌باشند. توجه کنید که سنجی بالا بر کران پایین محکم ناهمخوانی هندسی (۶) منطبق می‌شود. پس رابطه‌ی زیر در حالت کلی برقرار است:

$$D_P(\rho) \leq D_G(\rho). \quad (18)$$

بر این اساس می‌توان همبستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی را به صورت زیر تعریف نمود: