بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۲-۱۴ بهمن ۱۴۰۰

کنترل درهم‌تنیدگی اتم-فوتون از طریق مدوله‌سازی فرکانس

محدثه فروزش[۱]، علی مرتضی پور[۲]

[۱] *دانشکده علوم پایه دانشگاه گیلان، بلوار نامجو، رشت، گیلان،* ***mohadese.forouzesh@gmail.com***

[۲] *دانشکده علوم پایه دانشگاه گیلان، بلوار نامجو، رشت، گیلان،* ***mortezapour@guilan.ac.ir***

چکیده: در این مطالعه، تأثیر مدوله‌سازی فرکانس بر رفتار دینامیکی درهم‌تنیدگی اتم-فوتون در داخل یک کاواک نشت‌کننده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مشخص شده است که پارامترهای مدوله سازی بهینه‌ای وجود دارد که سبب می شود در سیستم مورد آزمایش، درهم‌تنیدگی اتم-فوتون برای مدت طولانی حفظ شود.

کلید واژه: درهم‌تنیدگی اتم-فوتون، کیوبیت، مدوله‌سازی فرکانس

Controlling atom-photon entanglement under frequency modulation

Mohadese Forouzesh, Ali Mortzapour

Department of Physics, University of Guilan, P. O. Box ٤١٣٣٥-١٩١٤, Rasht, Iran

mohadese.forouzesh@gmail.com, mortezapour@guilan.ac.ir

Abstract- In this study, we investigate the effect of frequency modulation on the dynamic behavior of atom-photon entanglement within a leaky cavity. It has been shown that there are optimal modulation parameters that maintain atom-photon entanglement in the test system for a long time.

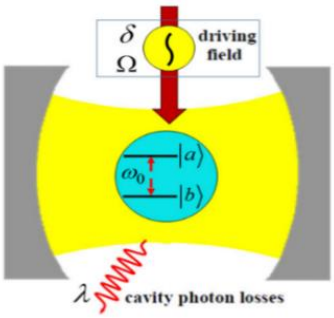
Keywords: atom-photon entanglement, qubit, frequency modulation

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-27]

مقدمه

مفهوم درهم‌تنیدگی کوانتومی برای اولین بار توسط انیشتین، پودولسکی و روزن در سال ۱۹۳۵ مطرح شد[۱]. درهم‌تنیدگی می‌تواند در نتیجه برهم‌کنش مستقیم یا غیرمستقیم بین سیستم‌های مختلف ایجاد شود. درهم‌تنیدگی ایجاد شده با استفاده از فعل و انفعالات اتم-میدان به برهم‌کنش مستقیم متکی است که به طور گسترده در شکل‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در هر سیستم واقعی، در اثر برهمکنش اجتناب‌ناپذیر بین سیستم و محیط پیرامون، درهم‌تنیدگی به راحتی از بین می‌رود. در این راستا چندین راهبرد برای طولانی شدن زمان پایداری درهم‌تنیدگی پیشنهاد شده است. برای مدوله‌سازی فرکانس در یک کیوبیت اتمی می توان از یک میدان غیرتشدیدی خارجی استفاده کرد. [۲]

محاسبه ماتریس چگالی تک‌کیوبیتی



شکل ۱: یک سیستم تک کیوبیتی با فرکانس گذار ω_0 که توسط یک میدان خارجی سینوسی با دامنه δ و فرکانس Ω مدوله می‌شود.

شکل ۱ یک سیستم تک کیوبیتی (سیستم دو ترازی) را نشان می‌دهد که در دمای صفر قرار دارد. کیوبیت مورد نظر با یک میدان کلاسیکی با فرکانس $\omega(t)$ و مدهای الکترومغناطیسی خلأ کاواک برهم‌کنش می‌کنند. معادله هامیلتونی این مدل در تقریب دو قطبی و موج چرخان به صورت زیر توصیف می‌شود ($\hbar=1$):

$$\hat{H}=\frac{\omega(t)}{2}\hat{\sigma}_z+\sum_k\omega_k\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\sum_k\{g_k\hat{\sigma}_+\hat{a}_k+g_k^*\hat{a}_k^\dagger\hat{\sigma}_-\}, \quad (۱)$$

به طوری که $\hat{\sigma}_\pm=\hat{\sigma}_x\pm i\hat{\sigma}_y$ و $\hat{\sigma}_j$ با $j=x,y,z$ ماتریس پائولی، $\hat{a}_k$ و $\hat{a}_k^\dagger$ عملگرهای نابودی و خلق فوتون مربوط به مد kام کاواک، g_k ثابت جفتیدگی بین کیوبیت و مد kام کاواک و اتم است. علاوه بر این، $\omega(t)$ فرکانس گذار وابسته به زمان بین حالت های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ کیوبیت را نشان می‌دهد، که به صورت $\omega(t)=\omega_0+\delta\cos\Omega t,$ تعریف می شود. در اینجا δ و Ω به ترتیب دامنه و فرکانس مدولاسیون را نشان می‌دهند. در چارچوب مرجع چرخان که توسط تبدیل یکانی زیر تعریف شده است:

$$\hat{U}=\exp\left[-i\left\{[\omega_0 t+(\delta/\Omega)\sin\Omega t]\hat{\sigma}_z/2+\sum_k\omega_k\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k t\right\}\right], \quad (۲)$$

هامیلتونی تبدیل شده $\hat{H}_{eff}=\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}+i(\partial\hat{U}^\dagger/\partial t)\hat{U}$ را به شرح زیر بدست می‌آوریم:

$$\hat{H}_{eff}=\sum_k g_k\hat{\sigma}_+\hat{a}_k e^{-i(\omega_k-\omega_0)t}e^{i(\delta/\Omega)\sin\Omega t}+\sum_k g_k^*\hat{a}_k^\dagger\hat{\sigma}_- e^{i(\omega_k-\omega_0)t}e^{-i(\delta/\Omega)\sin\Omega t} \quad (۳)$$

فرض می‌کنیم حالت اولیه سیستم به صورت زیر باشد:

$$|\Psi(0)\rangle=\{\cos(\theta/2)|a\rangle+\sin(\theta/2)e^{i\phi}|b\rangle\}|0\rangle. \quad (۴)$$

بنابراین، با گذشت زمان t > ۰ می‌توان حالت کل سیستم را به‌صورت زیر نوشت:

$$|\psi(t)\rangle=\cos(\theta/2)A(t)|a,0\rangle+\sin(\theta/2)e^{i\varphi}|b,0\rangle+\sum_k B_k(t)|b,1_k\rangle, \quad (۵)$$

که در آن $|1_k\rangle$ حضور یک تک فوتون را در مد kام میدان کاواک توصیف می‌کند و $B_k(t)$ دامنه احتمال آن را مشخص می‌نماید. از آنجا که تحول بردار حالت با معادله

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-27]

شرودینگر مطابقت دارد، می‌توان معادله (۲) را در معادله شرودینگر جایگزین کرد که معادله دیفرانسیل-انتگرال را برای $A(t)$ به‌دست می‌آورد:

$$\dot{A}(t)+\int_0^t dt' K(t,t')A(t')=0, \qquad (۶)$$

که در آن تابع هسته کرنل ($K(t,t')$) در حد شبه پیوستار مدهای کاواک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$K(t,t')=\exp[i(\delta/\Omega)\{\sin\Omega t-\sin\Omega t'\}]\times \int_0^\infty J(\omega_k)e^{-i(\omega_k-\omega_0)(t-t')}d\omega_k, \qquad (۷)$$

در اینجا $J(\omega_k)$ چگالی طیفی مدهای کاواک را نشان می‌دهد. برای یک کاواک با ساختار معمول، چگالی طیفی دارای فرم توزیع لورنتزی زیر است:

$$J(\omega_k)=\frac{1}{2\pi}\frac{\gamma\lambda^2}{[(\omega_0-\omega_k)^2+\lambda^2]}, \qquad (۸)$$

λ پهنای توزیع کمی فوتون‌های نشت‌شده از آینه‌های کاواک است. زمان همبستگی منبع توسط $\tau_r=\lambda^{-1}$ داده می‌شود. از طرف دیگر، پارامتر γ نشان دهنده واپاشی از حالت برانگیخته کیوبیت در حد مارکوفی است و با رابطه $\tau_q\approx\gamma^{-1}$ به زمان واهلش کیوبیت τ_q مربوط می‌شود. با توجه به معادله (۸)، می‌توان فرم تحلیلی $K(t,t')$ را به‌دست آورد:

$$K(t,t')=\frac{\gamma\lambda}{2}e^{-\lambda(t-t')}\exp[i(\delta/\Omega)\{\sin\Omega t-\sin\Omega t'\}]. \qquad (۹)$$

با حل معادله زیر می‌توان دامنه احتمال را به‌دست آورد:

$$\dot{A}(t)+\frac{\lambda\gamma}{2}\exp[i(\delta/\Omega)\sin\Omega t]\times \int_0^t \exp\left[-i(\delta/\Omega)\sin\Omega t'\right]e^{-\lambda(t-t')}A(t')dt'=0. \qquad (۱۰)$$

با محاسبه $A(t)$ و با استفاده از معادله (۵)، می‌توان با ردگیری از متغیرهای محیط، شکل صریح عملگر چگالی کاهش یافته کیوبیت $\rho_q(t)$ را در زمان دلخواه به‌دست آورد.

بحث و بررسی

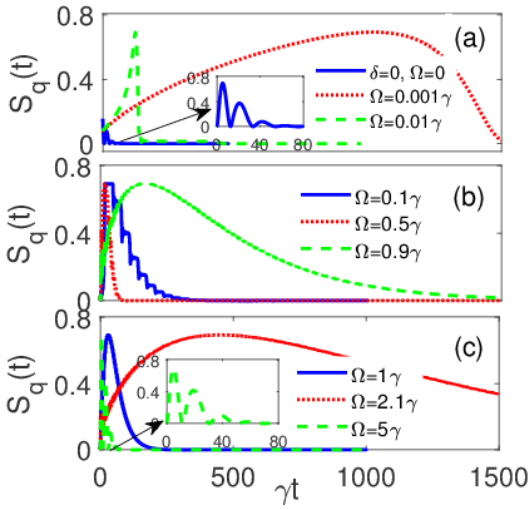
در این بخش، هدف ما درک این موضوع است که چگونه مدوله‌سازی فرکانس می‌تواند بر دینامیک درهم‌تنیدگی ایجاد شده بین خود کیوبیت و فوتون ناشی از واپاشی تحریک کیوبیت تأثیر بگذارد. تاکنون سنجه‌های فراوانی برای سنجش درهم‌تنیدگی بین زیرسامانه‌های مختلف معرفی شده است. در اینجا با توجه به اینکه حالت اولیه سیستم یک حالت خالص است بهترین سنجه ممکن برای سنجش میزان درهم‌تنیدگی آنتروپی فن‌نویمان می‌باشد. فونیکس و نایت [۳] نشان داده‌اند که برای یک سیستم دو بخشی که از حالت اولیه خالص شروع می‌شود، آنتروپی کوانتومی کاهش یافته (آنتروپی فن‌نویمان) می‌تواند به عنوان معیاری برای تعیین درجه درهم‌تنیدگی بین دو زیرسیستم استفاده شود. همچنین نشان داده شده است که رابطه مستقیمی بین آنتروپی کوانتومی کاهش یافته و درهم‌تنیدگی وجود دارد. به طوری که هر چه آنتروپی کوانتومی کاهش یافته بیشتر باشد، درهم‌تنیدگی بیشتر است. از این رو برای تحقق هدف خود، ما نیز همین کار را انجام می‌دهیم و از آنتروپی فن‌نویمان کیوبیت استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف شده است:

$$S_q(t)=-\mathrm{Tr}\,[\rho_q(t)\ln\rho_q(t)], \qquad (۱۱)$$

طبق تعریف، $S_q=0$ حالت خالص را نشان می‌دهد، در مقابل $S_q=Ln2$ مربوط به حداکثر درهم‌تنیدگی برای یک سیستم در معرض محیط است. شکل ۲ رفتار دینامیکی آنتروپی کاهش یافته کیوبیت $S_q(t)$ برای مقادیر مختلف فرکانس مدوله‌سازی وقتی دامنه مدولاسیون برابر $\delta=5\gamma$ باشد را نشان می‌دهد. در نتیجه اعمال میدان و برهم‌کنش بین مدهای کیوبیت و کاواک، کیوبیت و واپاشی تابشی آن

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-27]

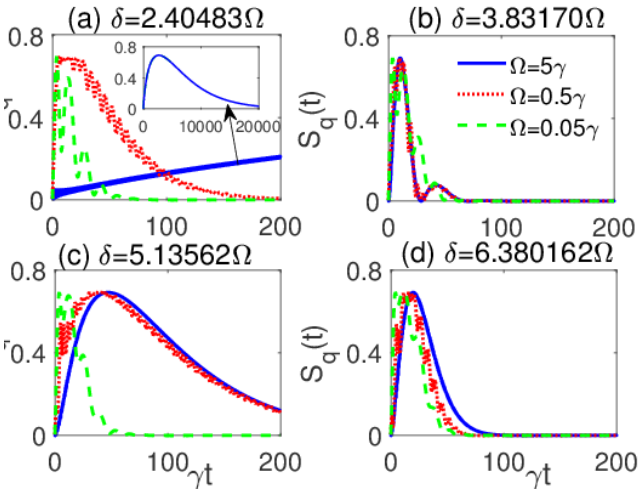
به طور آنی درهم‌تنیده می‌شوند. اتفاق جالب، بقای طولانی مدت درهم‌تنیدگی اتم-فوتون به ازای مقادیر $\Omega = 0.001\gamma$ ، $\Omega = 0.9\gamma$ و $\Omega = 2.1\gamma$ است. از سوی دیگر، نمودارها نشان می‌دهند که برای مقادیر زیاد فرکانس مدولاسیون $\Omega \geq 5\gamma$ درهم‌تنیدگی بسیار ضعیف است و زمان بقای آن حتی از حالتی که مدوله‌سازی خاموش است، کوتاه‌تر است.



شکل ۲: آنتروپی کیوبیت ($S_q(t)$) به ازای زمان بی بعد γt . مقادیر سایر پارامترها به صورت زیر در نظر گرفته می شود: $\phi = 0$, $\theta = 0$, $\lambda = 0.1\gamma$, $\delta = 5\gamma$.

شکل ۳ رفتار دینامیکی آنتروپی کاهش یافته کیوبیت را به ازای مقادیر مختلف نسبت δ/Ω نشان می‌دهد. روی صفر همانطور که در شکل ۳ (a) مشخص است، زمان بقای درهم‌تنیدگی کیوبیت-فوتون با افزایش فرکانس مدوله‌سازی به میزان قابل توجهی طولانی می‌شود. شکل ۳ (c) نیز این رفتار را تا حدودی تایید می‌کند. با این حال، منحنی‌های شکل ۳ (b) و (d) باعث می‌شود که چنین رفتاری را تعمیم ندهیم. البته شایان ذکر است که نسبت‌های دیگر δ/Ω و مقادیر بزرگتر Ω مورد بررسی قرار گرفتند اما مورد بهتری که بتوان آن را جایگزین $\delta = 2.40483\,\Omega$ و $\Omega = 5\gamma$ کرد (خط آبی شکل ۳ (a)) یافت نشد. شایان ذکر است که در کیوبیت‌های ابررسانای معمولی $\tau_q = \gamma^{-1} = 100ns$ است.

از این رو در شکل‌های ۲ و ۳ وقتی $\gamma t = x$ باشد، آنگاه زمان واقعی برابر با $t = 100(x)ns$ می‌باشد.



شکل ۳: آنتروپی کیوبیت $S_q(t)$ به ازای زمان بی‌بعد γt برای مقادیر مختلف دامنه مدولاسیون: (a) $\delta = 2.40483\,\Omega$ ، (b) $\delta = 3.83170\,\Omega$ ، (c) $\delta = 5.13562\,\Omega$ و (d) $\delta = 6.38016\,\Omega$ برای مقادیر مختلف فرکانس مدولاسیون: $\Omega = 0.05\gamma$ (خط چین سبز)، $\Omega = 0.5\gamma$ (نقطه چین قرمز)، $\Omega = 5\gamma$ (خط آبی). سایر پارامترها مانند شکل ۲ در نظر گرفته شده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این مطالعه تأثیر مدوله‌سازی فرکانس را بر رفتار دینامیکی درهم‌تنیدگی اتم-فوتون در داخل یک کاواک نشت‌کننده مورد مطالعه قرار دادیم. مطالعه ما نشان می‌دهد که مدوله‌سازی فرکانس یک تک کیوبیت قادر به اصلاح زمان بقای درهم‌تنیدگی اتم-فوتون است.

مرجع‌ها

[۱] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?,” Phys. Rev. ٤٧, ٧٧٧ (١٩٣٥)..

[۲] M. W. Noel, W. M. Griffith, and T. F. Gallagher, “Frequency-modulated excitation of a two-level atom,” Phys. Rev. A ٥٨, ٢٢٦٥ (١٩٩٨).

[۳] S. J. D. Phoenix and P. L Knight, “Comment on “Collapse and revival of the state vector in the Jaynes– Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus,” Phys. Rev. Lett. ٦٦, ٢٨٣٣ (١٩٩١).

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-27]