بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

تولید حالت‌های درهم‌تنیده *GHZ* و *W* در کاواک

سیده ربابه میری[۱]، محمد کاظم توسلی[۱و۲] و رسول رکنی زاده[۳]

[۱]گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲]آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی، دانشگاه یزد، یزد
[۳]گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

چکیده - در این مقاله روشی را برای تولید برخی از حالت‌های درهم‌تنیده پیشنهاد کرده‌ایم. سامانهٔ پیشنهادی از آرایه‌ای از کاواک‌ها تشکیل شده‌است که به‌طورتناوبی با عملگرهای تحول زمانی جینز-کامینگز- و آنتی-جینز-کامینگز-مانند مانند توصیف می‌شوند. با بهره‌گیری از چنین سامانه‌ای می‌توان حالت‌های درهم‌تنیدهٔ GHZ را تولید کرد. از دیگر قابلیت‌های این سامانه، تولید حالت درهم‌تنیده W وابسته به میدان کاواک‌ها است. در این حالت، شرایط اعمالی بر کاواک‌ها طوری تغییر می‌یابد که همهٔ آنها دارای تحول زمانی یکسانی باشند. ویژگی ممتاز این طرح‌واره، عدم وابستگی نتایج نهایی به چگونگی آشکارسازی حالت اتمی است.

کلید واژه- حالت درهم‌تنیده، برهم‌کنش جینز-کامینگز، برهم‌کنش آنتی-جینز-کامینگز، حالت *GHZ*، حالت *W*.

Generation of GHZ and W states of the cavity field

Miry [1], M. K. Tavassoly [1,2] and R. Roknizadeh [3]. R.S

[1]Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, University of Yazd, Yazd
[2]The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd, Iran
[3]Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract- In this paper, we suggest a scheme which can produce various types of entangled states of the cavity field. In the scheme, cavities with different time evolution properties are utilized. the cavities are arranged such that, their time evolutions change alternately from JC- to anti-JC-like Hamiltonian. From this configuration, three-partite GHZ states can be generated. At last, it is illustrated that, in the multi-cavity set up, if one prepares all cavities with the same time evolution property, W state can be obtained. An important feature of the proposed scheme is the fact that, the results of the processes are independent of the result of atomic detection.

Keywords: Entangled state, Jaynes-Cummings interaction, anti-Jaynes-Cummings interaction, GHZ state, W state.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

۱- مقدمه

در حوزهٔ اپتیک کوانتومی، حالت‌هایی با درهم‌تنیدگی چندبخشی توجه زیادی را به خود جلب کرده‌است. از طرف دیگر، ویژگی‌های ساختاری این حالت‌ها سبب کاربردهای فراوان و متنوع آنها شده‌است. از جملهٔ این حالت‌ها، می‌توان به حالت‌هایی با درهم‌تنیدگیِ دوبخشی، مانند حالت‌های EPR و حالت‌هایی با درهم‌تنیدگیِ چندبخشی مانند حالت‌های GHZ [۱] و W [۲] اشاره کرد. به عنوان نمونه، حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}[|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle]$ حالت GHZ با درهم‌تنیدگیِ سه‌بخشی است. این حالت‌ها در حوزهٔ انتقال اطلاعات کوانتومی و کدگذاری کوانتومی با حجم بالا کاربرد دارند [۳]. چنین حالت‌هایی را می‌توان با تکنیک‌های متنوعی از جمله سامانهٔ یون به‌دام افتاده و موج رونده تولید کرد [۴]. علاوه بر این، حالت W با درهم‌تنیدگی سه‌بخشی، به‌صورت $\frac{1}{\sqrt{3}}[|1,0,0\rangle + |0,1,0\rangle + |0,0,1\rangle]$ تعریف شده‌است. کاربرد این نوع از حالت‌ها در زمینهٔ سردسازی کوانتومی و جداسازی اطلاعات کوانتومی به اثبات رسیده‌است [۵]. حالت‌های اخیر را نیز می‌توان با سامانه‌های متنوعی نظیر موج رونده و آرایه موج‌بر چندگانه تولید کرد [۶].

در این مقاله، قصد داریم با بهره‌گیری از طرح‌واره معرفی شده در [۷]، روشی را برای تولید برخی حالت‌های درهم‌تنیده در کاواک ارائه دهیم.

۲- هامیلتونی جینز-کامینگز و آنتی-جینز-کامینگز-مانند

مدلِ جینز-کامینگز برهم‌کنش اتم و میدان کوانتیده در فضای کاواک را به‌خوبی توصیف می‌کند. در حالت کلی، این هامیلتونی از جملات موافق با پایستگی انرژی و همچنین نقض‌کننده این اصل تشکیل شده‌است. به‌طور معمول، جملات نقض‌کننده پایستگی انرژی، که از آن به هامیلتونی آنتی-جینز-کامینگز تعبیر می‌شود، در کاواک با تقریب موج چرخان حذف می‌شوند. اما در [۷] نشان داده شده‌است که این نوع از هامیلتونی در شرایطی در کاواک امکان وقوع می‌یابد. سامانهٔ معرفی‌شده، به شکل زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H} = \hbar\delta\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger} + \hat{\sigma}_j\right) + \hbar g\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{a} + \hat{\sigma}_j\hat{a}^{\dagger}\right) \quad (۱)$$

در این رابطه $\hat{\sigma}_j,\ \hat{\sigma}_j^{\dagger}$ به‌ترتیب عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده مربوط به اتم دوترازی jام با بسامد گذار ω_o هستند. $\hat{a}$ عملگر نابودیِ میدان کوانتومی با بسامد ω و Ω, g به‌ترتیب، ضریب جفت‌شدگی اتم با میدان کوانتومی و میدان کلاسیکی است. همچنین $\delta = \omega - \omega_L$ پارامتر نامیزانی است. هامیلتونی سامانه در تصویر برهم‌کنش به شکل زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\hat{H}^{I} = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}(|+\rangle_{j\,j}\langle+|-|-\rangle_{j\,j}\langle-| + e^{2i\Omega t}|+\rangle_{j\,j}\langle-| - e^{-2i\Omega t}|-\rangle_{j\,j}\langle+|)\hat{a}e^{-i\delta t} + H.C. \quad (۲)$$

که در آن از پایه‌های $|\pm\rangle_j = \frac{|g\rangle_j \pm |e\rangle_j}{\sqrt{2}}$ استفاده شده‌است. حال اگر قرار دهیم $\delta = \pm 2\Omega$ آنگاه

$$\hat{H}^{(+)} = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}(|+\rangle_{j\,j}\langle-|\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}|-\rangle_{j\,j}\langle+| \quad (۳)$$

$$\hat{H}^{(-)} = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}(|-\rangle_{j\,j}\langle+|\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}|+\rangle_{j\,j}\langle-| \quad (۴)$$

همان‌طور که از رابطهٔ (۳) و (۴) پیداست، تحول سامانه در شرایطی با مدل جینز-کامینگز و در حالت دیگر با مدل آنتی-جینز-کامینگز-مانند توصیف می‌شود. عملگرهای تحول زمانی متناظر با این هامیلتونی‌ها عبارتند از:

$$\hat{U}^{(+)}(\tau) = \begin{pmatrix} C(\hat{n}+1,\tau) & -i\,S(\hat{n},\tau)\hat{a} \\ -i\,\hat{a}^{\dagger}\,S(\hat{n},\tau) & C(\hat{n},\tau) \end{pmatrix} \quad (۵)$$

$$\hat{U}^{(-)}(\tau) = \begin{pmatrix} C(\hat{n},\tau) & -i\hat{a}^{\dagger}S(\hat{n},\tau) \\ -i\,S(\hat{n},\tau)\hat{a} & C(\hat{n}+1,\tau) \end{pmatrix} \quad (۶)$$

که در آن

$$C(\hat{n},\tau) = cos\left(\sqrt{\hat{n}}g\tau/2\right)$$
$$S(\hat{n},\tau) = sin\left(\sqrt{\hat{n}}g\tau/2\right)/\sqrt{\hat{n}} \quad (۷)$$

۲-۱- تولید حالت‌های درهم‌تنیده GHZ

در این قسمت، قصد داریم سامانه‌ای برای تولید حالت‌های درهم‌تنیده GHZ با درهم‌تنیدگی سه‌بخشی معرفی کنیم. سامانهٔ مورد نظر از آرایه‌ای از کاواک‌ها تشکیل شده است که تحول زمانی آنها به طور تناوبی از مدل جینز-کامینگز به آنتی-جینز-کامینگز و برعکس تغییر می‌یابد. قبل از مطالعهٔ رفتار سامانه، این نکته قابل ذکر است که، برای دست‌یابی به هامیلتونی آنتی-جینز-کامینگز مانند باید شرط $\delta = 2\Omega$ به $\delta = -2\Omega$ تغییر یابد. یکی از روش‌های برقراری چنین تبدیلی، تغییر بسامد اتم و بسامد میدان کلاسیکی با حفظ رابطهٔ $\Delta = \omega_0 - \omega_L = 0$ است. با این وصف، این دو بسامد باید به شکل

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

$\omega_0 \to \omega_0 + 4\Omega$ و $\omega \to \omega + 4\Omega$ تغییر یابند. برای تغییر بسامد اتم می‌توان از رهیافت اثر استارک بهره‌برد که سبب جابه‌جایی در ترازهای انرژی می‌شود. از سوی دیگر، اگر در سامانه، دو میدان کلاسیکی با بسامدهای ω_L و $\omega_L + 4\Omega$ اعمال شود که به‌طور تناوبی به‌کار گرفته شوند، تبدیل‌های بالا محقق خواهد شد.

اکنون، آرایه‌ای متشکل از سه کاواک در نظر می‌گیریم. این کاواک ها طوری آماده‌سازی شده‌اند که کاواک اول و سوم با برهم‌کنش جینز-کامینگز و کاواک دوم با برهم‌کنش آنتی-جینز-کامینگز توصیف می‌شود. حالت اولیه سامانه را به شکل $|0,0,0\rangle|+\rangle$ در نظر می‌گیریم. اتم دوترازی در بازه‌های زمانی τ_1 ، τ_2 و τ_3 به‌ترتیب با کاواک‌های اول، دوم و سوم برهم‌کنش می‌کند و در انتها حالت سامانه اتم-میدان به حالت زیر تبدیل خواهد شد:

$$|\Psi_1\rangle = \hat{U}^{(+)}(\tau_3)\hat{U}^{(-)}(\tau_2)\hat{U}^{(+)}(\tau_1)|\Psi_0\rangle = +cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle|+\rangle -sin(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2)cos(g\tau_3/2)|1,1,0\rangle|+\rangle +icos(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle|-\rangle +isin(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2)sin(g\tau_3)|1,1,1\rangle|-\rangle -isin(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2)|1,0,0\rangle|-\rangle \quad (۸)$$

چنانچه قرار دهیم $\tau_2 = \frac{\pi}{g}$ و سپس حالت سامانه را در تصویر شرودینگر بازنویسی کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$|\Psi_1\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\Omega\tau_3}(cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle -e^{-2i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|1,1,0\rangle) +ie^{i\Omega\tau_3}(-e^{-i\omega\tau_3}cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle -e^{-3i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|1,1,1\rangle)]|g\rangle + \frac{e^{-i\omega_0\tau_3}}{\sqrt{2}}[e^{-i\Omega\tau_3}(cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle -e^{-2i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|1,1,0\rangle) +ie^{i\Omega\tau_3}(-e^{-i\omega\tau_3}cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle -e^{-3i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|1,1,1\rangle)]|e\rangle \quad (۹)$$

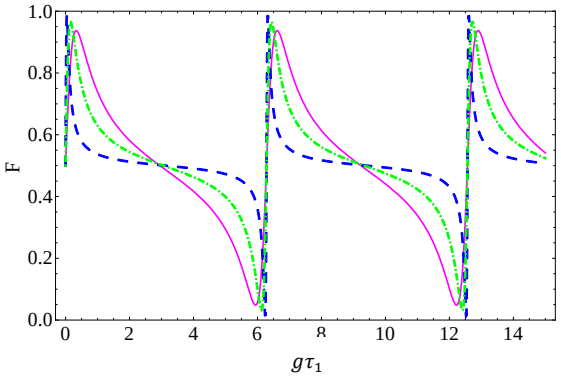
واضح است که، صرف‌نظر از آشکارسازی اتم در حالت پایه یا برانگیخته، میدان در برهم‌نهی‌ای از حالت‌های $|0,0,0\rangle$، $|1,1,0\rangle$، $|0,0,1\rangle$ و $|1,1,1\rangle$ قرار خواهد گرفت. با فرض آشکارسازی اتم در حالت پایه، حالت (۹) به حالت زیر فروافت می‌کند:

$$|\phi\rangle_1 = \frac{N}{\sqrt{2}}[e^{-i\Omega\tau_3}(cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle -e^{-2i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2)|1,1,0\rangle) +ie^{i\Omega\tau_3}(-e^{-i\omega\tau_3}cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle -e^{-3i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)|1,1,1\rangle)] \quad (۱۰)$$

ضریب بهنجارش برای این حالت برابر است با $N = \sqrt{2}$. بنابراین، احتمال موفقیت آشکارسازی اتم در حالت پایه، یا به عبارتی $P_g = \frac{1}{N^2}$، برای همه زمان‌های برهمکنش مقدار ثابت 0.5 خواهد شد. اکنون، با در نظر گرفتن حالت درهم‌تنیده GHZ به شکل $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0,0,0\rangle + |1,1,1\rangle]$ ، میزان وفاداری با رابطهٔ زیر به‌دست خواهد آمد:

$$F = |\langle\Psi|\phi\rangle_1|^2 = \frac{1}{2}\left|e^{-i\Omega\tau_3}cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_3/2) +ie^{i\Omega\tau_3}e^{-3i\omega\tau_3}sin(g\tau_1/2)sin(g\tau_3/2)\right|^2 \quad (۱۱)$$

در شکل۱، وفاداری برحسب $g\tau_1$ به‌ازای مقادیر مختلف $g\tau_3$ رسم شده‌است. در رسم شکل از مقادیر عددی $\delta/g = 25$ و $\omega/g = 100$ بهره برده‌ایم. همان‌طور که از شکل پیداست، وفاداری در ناحیه‌هایی به مقدار بیشینهٔ یک رسیده‌است. بر این اساس، چنانچه زمان‌های برهم‌کنش به درستی تنظیم شوند به حالت درهم‌تنیده سه‌بخشی GHZ دست خواهیم یافت.



شکل۱: منحنی وفاداری برحسب $g\tau_1$ به ازای مقادیر مختلف $g\tau_3$. منحنی خطنقطه: $g\tau_3 = 2.8$، منحنی خط‌چین: $g\tau_3 = 3.1$، منحنی خط‌توپر: $g\tau_3 = 3.3$. در رسم شکل از مقادیر عددی $\delta/g = 25$ و $\omega/g = 100$ استفاده شده‌است.

قابل ذکر است که، با افزایش تعداد کاواک‌ها به چهار کاواک، در انتهای فرایند و با تنظیم مناسب زمان‌های برهم‌کنش، حالت درهم‌تنیده چهاربخشی GHZ تولید خواهد شد.

۲-۲- تولید حالت‌های درهم‌تنیده W

سامانه‌ای که در قسمت قبل معرفی شد، می‌تواند نوع دیگری از حالت‌های درهم‌تنیده وابسته به میدان کاواک را تولید کند. در این حالت شرایط اعمال شده بر کاواک‌ها را طوری تغییر می‌دهیم که همهٔ آنها دارای تحول زمانی یکسانی باشند. برای این منظور، در کاواک‌های با برهم‌کنش آنتی-جینز-کامینگز، اثر استارک را حذف کرده و بسامد میدان کلاسیکی را به ω_L تغییر می‌دهیم. با

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]

برقراری چنین شرایطی هامیلتونی از مدل آنتی-جینز-کامینگز به جینز-کامینگز تبدیل خواهد شد. برای بررسی تحول زمانی چنین سامانه‌ای، حالت اولیه سامانه را به شکل $|0,0,0\rangle|+\rangle$ در نظر می‌گیریم. اتم دوترازی در بازه‌های زمانی τ_1 ، τ_2 و τ_3 به‌ترتیب با کاواک‌های اول، دوم و سوم برهم‌کنش انجام داده و در انتها حالت سامانه اتم-میدان به حالت زیر تبدیل خواهد شد:

$$|\Psi_2\rangle = \hat{U}^{(+)}(\tau_3)\hat{U}^{(+)}(\tau_2)\hat{U}^{(+)}(\tau_1)|\Psi_0\rangle = +cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2)cos(g\tau_3/2)|0,0,0\rangle|+\rangle -icos(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2)sin(g\tau_3/2)|0,0,1\rangle|-\rangle -icos(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2)|0,1,0\rangle|-\rangle -isin(g\tau_1/2)|1,0,0\rangle|-\rangle \quad (۱۲)$$

با انتخاب $\tau_3 = \frac{\pi}{g}$ و بازنویسی حالت سامانه در فضای شرودینگر خواهیم داشت:

$$\left|\Psi_2\right\rangle_s = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\Omega\pi/g}\,e^{-i\omega\pi/g}\times [cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2)|0,0,1\rangle +cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2)|0,1,0\rangle +sin(g\tau_1/2)|1,0,0\rangle]|g\rangle +\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\Omega\pi/g}\,e^{-i\omega\pi/g}\,ie^{-i\omega_0\pi/g}\times [cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2)|0,0,1\rangle +cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2)|0,1,0\rangle +sin(g\tau_1/2)|1,0,0\rangle]|e\rangle \quad (۱۳)$$

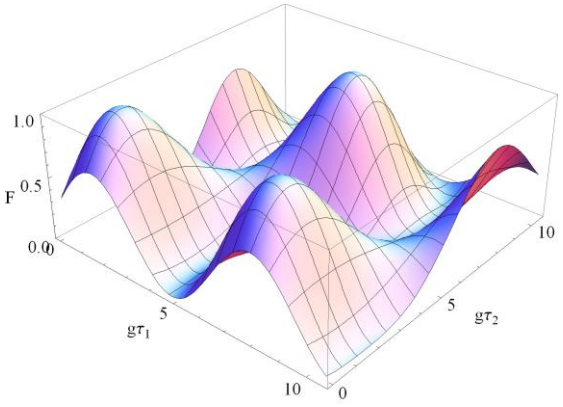
واضح است که، صرف‌نظر از آشکارسازی اتم در حالت پایه یا برانگیخته، میدان در برهم‌نهی‌ای از حالت‌های $|1,0,0\rangle$، $|0,1,0\rangle$ و $|0,0,1\rangle$ قرار خواهد گرفت. با فرض آشکارسازی اتم در حالت پایه، (۱۳) به حالت زیر تبدیل خواهد شد:

$$|\phi\rangle_2 = \frac{N}{\sqrt{2}}e^{-i\Omega\pi/g}\,e^{-i\omega\pi/g} [cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2)|0,0,1\rangle +cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2)|0,1,0\rangle +sin(g\tau_1/2)|1,0,0\rangle] \quad (۱۴)$$

در این حالت نیز، ضریب بهنجارش برابر است با $N = \sqrt{2}$. بنابراین، احتمال موفقیت آشکارسازی اتم در حالت پایه برابر با $P_g = \frac{1}{N^2} = 0.5$ خواهد شد. در این مرحله با در نظر گرفتن حالت درهم‌تنیده W به شکل $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|1,0,0\rangle + |0,1,0\rangle + |0,0,1\rangle]$، برای وفاداری خواهیم داشت:

$$F = |\langle\Psi|\phi\rangle_2|^2 = \frac{1}{3}|cos(g\tau_1/2)cos(g\tau_2/2) +cos(g\tau_1/2)sin(g\tau_2/2) + sin(g\tau_1/2)|^2 \quad (۱۵)$$

در شکل۲، وفاداری برحسب $g\tau_1$ و $g\tau_2$ رسم شده‌است. همان‌طور که از شکل پیداست، این تابع در ناحیه‌هایی به مقدار بیشینهٔ یک رسیده‌است. بنابراین، با تنظیم زمان‌های برهم‌کنش، می‌توان به حالت درهم‌تنیده W وابسته به میدان کاواک‌ها دست یافت.



شکل۲: منحنی وفاداری برحسب $g\tau_1$ و $g\tau_2$.

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی را برای تولید برخی از حالت‌های درهم‌تنیده معرفی کردیم. بدین منظور، آرایه‌ای از کاواک‌ها به‌کار گرفته شدند. تحول زمانی کاواک‌ها به‌طور یک‌درمیان از مدل جینز-کامینگز به آنتی-جینز-کامینگز و برعکس تغییر می‌یابد. در شرایطی که آرایه از سه کاواک تشکیل شده باشد، پس از برهم‌کنش اتم با کاواک‌ها، صرف‌نظر از نتیجهٔ آشکارسازی حالت اتمی، میدان در حالت درهم‌تنیده GHZ قرار می‌گیرد. از دیگر سو، با تغییر شرایط اعمال شده، کاواک‌ها با تحول زمانی یکسانی توصیف شوند، آنگاه در انتهای فرایند، حالت‌های W تولید خواهند شد. ویژگی بارز این سامانه، عدم وابستگی نتیجه نهایی فرایند به آشکارسازی حالت اتمی است.

مراجع

[1] Greenberger, D. M., Horne, M., Zeilinger, A., "*Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*", Kluwer, Dordrecht (1989).

[2] Dur, W., Vidal, G., Cirac, J. I., "*Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*", **Phys. Rev. A 62** (2000) 062314.

[3] Lu, C-Y, Yang, T., Pan, J-W, "*Experimental multiparticle entanglement swapping for quantum networking*", **Phys. Rev. Lett. 103** (2009) 020501.

[4] Rosa Silva, J. B., Ramos, R. V., "*Smart generation of a tripartite GHZ-type state for coherent state qubit*", **Opt. Commun. 281** (2008) 2705.

[5] Zheng, S-B, "*Splitting quantum information via W states*", **Phys. Rev. A 74** (2006) 054303.

[6] Perez-Leija, A., Hernandez-Herrejon, J. C., Moya-Cessa, H., Szameit, A., Christodoulides, D. N., "*Generating photon-encoded W states in multiport waveguide-array systems*", **Phys. Rev. A 87** (2013) 013842.

[7] Solano, E., Agarwal, G. S., Walther, H., "*Strong-driving-assisted multipartite entanglement in cavity QED*", **Phys. Rev. Lett. 90** (2003) 027903.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-05]