بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

# اثر فرکانس فوتونی بر درهم‌تنیدگی حالت‌های یک میدان الکترومغناطیسی قطبیده دایروی و الکترون‌های π در گرافین

فرزانه حاتمی کمین و محمد مهدی گلشن

بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

**چکیده - درهم‌تنیدگی از مهم‌ترین ابزارها در نظریه اطلاعات کوانتومی است. درک مفهوم درهم‌تنیدگی ملزم به بررسی چگونگی تولید و کنترل آن در محیط‌های گوناگون است که در این میان گرافین کاندیدای مناسبی می‌باشد. ازاین‌رو این مقاله به بررسی برهم‌کنش الکترون π در گرافین با فوتون‌ها، درنتیجه درهم‌تنیدگی بین حالت‌های این دو اختصاص دارد. محاسبات ما نشان می‌دهد که این درهم‌تنیدگی به تغییرات فرکانس میدان الکترومغناطیسی شدیدا وابسته است: قبل از فرکانس تشدید، بیشینه درهم‌تنیدگی با افزایش فرکانس میدان، کاهش می‌یابد. درحالی‌که پس از آن، بیشینه درهم‌تنیدگی با دور شدن از فرکانس تشدید، افزایش می‌یابد. دلایل فیزیکی این پدیده، به‌صورت جامع ارائه می‌شود.**

کلید واژه- درهم‌تنیدگی، گرافین، فوتون، قطبش دایروی

# Effect of photonics frequency on the entanglement between circularly polarized electromagnetic fields and π-electrons in graphene

Farzane Hatami Kamin and Mohammad Mehdi Golshan

Physics Department, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract- Entanglement is the most important tool in the theory of quantum information processing. In such applications, it is crucial to generate and control the entanglement. A candid material for this is the π-electron in graphene. Thus, in the present article we report the entanglement between π-electrons and *circularly* polarized photons in graphene. Our calculations show that the degree of entanglement between the π-electrons and photons is much sensitive to the photonic frequency: As the photonic frequency increases, up to the resonance, the entanglement increases, while beyond the resonance the effect is reversed. We also present the physical reasons behind this temporal the behavior.

Keywords: Entanglement, Graphene, Photon, Circularly Polarized

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06 ]

## ۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی خاصیتی از همبستگی غیر موضعی دو یا چند سامانه کوانتومی است. این نوع همبستگی یک پدیده کاملا کوانتومی بوده و عنصر مرکزی در نظریه اطلاعات کوانتومی را تشکیل می‌دهد [۱و۲]. بررسی چگونگی تولید و کنترل درهم‌تنیدگی در نانوساختارها و به ویژه گرافین نقش برجسته‌ای در پیش‌برد اهداف محاسباتی بسیار سریع و پردازش اطلاعات در مقیاس‌های کوچک را خواهد داشت. گرافین که از یک لایه اتم کربن مسطح ساخته شده، شبکه ای به شکل کندوی عسل ایجاد می کند و به عنوان ساختاری بنیادی در نانوساختارهای کربن به شمار می‌رود [۳]. در این مقاله ابتدا هامیلتونی الکترون‌های آزاد $\pi$ و سپس هامیلتونی برهم‌کنش الکترون‌های $\pi$ و میدان الکترومغناطیسی تک مد ارائه می‌شود. راستای انتشار میدان الکترومغناطیسی عمود بر صفحه گرافین می‌باشد و قطبش آن دایروی است. گرافین با فوتون‌های میدان الکترومغناطیسی برهم‌کنش کرده، بین حالت‌های الکترون $\pi$ و فوتون‌های میدان درهم‌تنیدگی بوجود می‌آید. در این مقاله از آنتروپی فون‌نویمان به منظور کمی کردن درهم‌تنیدگی استفاده شده است. محاسبات ما نشان می‌دهد که درهم‌تنیدگی به تغییرات فرکانس میدان الکترومغناطیسی شدیدا وابسته است. در ادامه چگونگی تغییرات درهم‌تنیدگی بر حسب فرکانس میدان و دلایل آن را به تفصیل ارائه می‌کنیم.

## ۲- هامیلتونی الکترون‌های $\pi$ آزاد در گرافین

در صفحه گرافین، نوارهای رسانش و ظرفیت در نقاط $K$ و $K'$ (نقاط دیراک) در منطقه اول بریلوین، به هم می‌رسند [۴]. حالت‌های الکترونیکی نزدیک نقطه $K$، توسط معادله $\vec{k}\cdot\vec{p}$ توصیف می‌شود [۴]:

$$H\psi_{s,\vec{k}} = \varepsilon\psi_{s,\vec{k}} \qquad (۱)$$

در این معادله $H=\gamma(\vec{\sigma}\cdot\vec{k})$، $\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y)$ ماتریس‌های پاولی شبه اسپین هستند و در پایه دو حالت الکترونی متعامد، که از زیرشبکه‌های گرافین ناشی می‌شوند، نوشته شده‌اند، $\vec{k}=(k_x,k_y)$ عملگر بردار موج و $\gamma$ متناسب با سرعت فرمی الکترون‌های $\pi$ است. ویژه‌توابع در رابطه (۱) دارای شکل کلی زیر (در پایه‌های شبه اسپین) می‌باشند [۵]:

$$\psi_{s,\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} s \\ e^{i\theta(\vec{k})}\end{pmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن $s=\pm 1$، به ترتیب نوارهای رسانش و ظرفیت را مشخص می‌کند و:

$$k_x = k\cos\theta \ , \ k_y = k\sin\theta \ , \ k=|\vec{k}| \qquad (۳)$$

انرژی متناظر با این حالت‌ها به شکل زیر داده می‌شود [۵]:

$$\varepsilon_s(\vec{k}) = s\varepsilon(\vec{k}) \ , \ \varepsilon(\vec{k}) = \gamma k \qquad (۴)$$

## ۳- هامیلتونی گرافین در حضور میدان الکترومغناطیسی تک مد دایروی

به منظور توصیف برهم‌کنش بین یک موج الکترومغناطیسی تخت که به شکل دایروی قطبیده است و الکترون‌های $\pi$ در گرافین، از سیستم مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم. در این سیستم محور $z$ها، عمود بر صفحه گرافین که در $z=0$ واقع شده، تعریف می‌شود. در مجاورت نقاط دیراک، هامیلتونی الکترون‌های $\pi$ که با میدان الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کنند را برای یکی از نقاط دیراک (نقطه $K$) و به ازای یک جهت اسپینی معین، می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$H_e = v_f\vec{\sigma}\cdot(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}) \qquad (۵)$$

در اینجا $v_f$ سرعت فرمی الکترون، $\vec{p}$ بردار تکانه الکترون در صفحه گرافین، $e$ بار الکترون و $\vec{A}$ پتانسیل برداری میدان الکترومغناطیسی است. اگر فرض کنیم موج الکترومغناطیسی با قطبش دایروی راستگرد و در راستای محور $z$ منتشر شود، پتانسیل برداری را می‌توان به شکل زیر نوشت [۶]:

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_0 L^3}}(\hat{\varepsilon}\hat{a}+\hat{\varepsilon}^* a^\dagger) \qquad (۶)$$

در اینجا $\omega_0$ فرکانس میدان الکترومغناطیسی، $L^3$ حجم کاواک الکترومغناطیسی، $\hat{\varepsilon}=\frac{\hat{x}+i\hat{y}}{\sqrt{2}}$ بردار قطبش، $\hat{x}$ و



[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06 ]

$\hat{y}$ بردارهای یکه در راستای محور $x$ و $y$ ، $\hat{a}^{\dagger}$ و $\hat{a}$ به ترتیب عملگرهای خلق و فنای فوتونی در تصویر شرودینگر هستند. بنابراین هامیلتونی کل سیستم الکترون-فوتون که شامل هامیلتونی میدان $\hbar\omega_0\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ و هامیلتونی (۵) است، به شکل زیر داده می‌شود:

$$H=\hbar\omega_0\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hbar v_f\vec{\sigma}\cdot\vec{k}-e\sqrt{\frac{4\pi {v_f}^2\hbar}{\omega_0 L^3}}(\sigma_+\hat{a}+\sigma_-\hat{a}^{\dagger}) \quad (۷)$$

در این جا $\sigma_{\pm}$ عملگرهای نردبانی شبه اسپین هستند. در نوشتن رابطه (۷) از این واقعیت که $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ استفاده شده است.

## ۴- درهم‌تنیدگی حالت‌های الکترون π و فوتون در گرافین

هامیلتونی را که در بخش قبل ارائه کردیم می‌توان به شکل زیر نوشت [۷]:

$$H=H_0+V \quad (۸)$$

که در آن $H_0$ صریحا وابسته به زمان نیست:

$$H_0=\hbar\omega_0\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hbar v_f\vec{\sigma}\cdot\vec{k} \quad (۹)$$

ویژه‌حالت‌های $H_0$ از ضرب مستقیم ویژه‌حالت‌های هامیلتونی الکترون‌های π در نقطه $K$ و حالت‌های فوتونی بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}|\psi_1,n\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-|A\rangle+e^{i\theta(\vec{k})}|B\rangle)\otimes|n\rangle\\ |\psi_2,n\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle+e^{i\theta(\vec{k})}|B\rangle)\otimes|n\rangle\end{aligned} \quad (۱۰)$$

و $V$ پتانسیل برهم‌کنش در تصویر شرودینگر است:

$$V=-e\sqrt{\frac{4\pi {v_f}^2\hbar}{\omega_0 L^3}}(\sigma_+\hat{a}+\sigma_-\hat{a}^{\dagger}) \quad (۱۱)$$

توجه شود $V$ حالت‌های الکترون π را (از طریق $\sigma_{\pm}$) با حالت‌های فوتون (از طریق $a,a^{\dagger}$) جفت می‌نماید. هرگاه بتوان هامیلتونی کل سیستم را به صورت (۸)، بنویسیم بر اساس نظریه اختلال وابسته به زمان، چگونگی تغییر زمانی یک کت اولیه دلخواه که در این‌جا کت $|\psi_1,n\rangle$ را انتخاب کرده‌ایم، به شکل زیر محاسبه خواهد شد [۷]:

$$|\psi_1,n\rangle_t=\sum_n[c_{1,n}(t)e^{-iE_{1,n}\frac{t}{\hbar}}|\psi_1,n\rangle+c_{2,n}(t)e^{-iE_{2,n}\frac{t}{\hbar}}|\psi_2,n\rangle] \quad (۱۳)$$

پس از محاسبه صریح ضرایب بسط، با تشکیل عملگر چگالی $\rho(t)$، نسبت به حالت‌های الکترون π ردگیری جزئی می‌کنیم و به عملگر چگالی کاهش یافته $\rho_F(t)$ می‌رسیم. با محاسبه ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته می‌توان مقدار تابع آنتروپی فون‌نویمان را از رابطه زیر بدست آورد [۸]:

$$S(\rho)=-\sum_i\lambda_i\log\lambda_i \quad (۱۴)$$

در این‌جا $\lambda_i$ معرف ویژه‌مقادیر ماتریس $\rho_F(t)$ است که از نرم‌افزار Mathematica به منظور محاسبه این ویژه‌مقادیر استفاده کرده‌ایم. لازم به ذکر است که تحول زمانی آنتروپی فون‌نویمان همان تحول زمانی درهم‌تنیدگی است.

## ۵- وابستگی درهم‌تنیدگی به تغییرات فرکانس میدان الکترومغناطیسی

یکی از پارامترهای موثر بر درهم‌تنیدگی فرکانس میدان الکترومغناطیسی $\omega_0$ است. بنابراین در شکل‌های ۱ و ۲ روند تغییرات درهم‌تنیدگی بر حسب زمان برای فرکانس‌های متفاوت فوتونی $\omega_0$، ارائه شده است. در نمودارهای شکل (۱)، نسبت $\omega_0$ های مختلف به فرکانس گذار الکترونی ( $\Omega=v_f k=10^{14}H_z$)، از یک کوچکتر ( قبل از تشدید ) و در شکل (۲)، این نسبت‌ها از یک بزرگ‌تر ( بعد از تشدید ) می‌باشند.

همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، هر چه فرکانس میدان بزرگتر می‌شود و به فرکانس تشدید نزدیک‌تر می‌شویم، بیشینه درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار وابستگی پارامتر برهم‌کنش الکترون و میدان به فرکانس میدان است، بنابراین هرچه فرکانس بزرگتر می‌شود پارامتر برهم‌کنش کوچک می‌شود که این به کم شدن همبستگی بین حالت‌های الکترون و فوتون و درنتیجه کاهش درهم‌تنیدگی می‌انجامد. از طرفی در فرکانس‌های پایین‌تر درهم‌تنیدگی دارای پوش‌هایی است که در طی زمان با یک دوره تناوب معین تکرار می‌شوند.



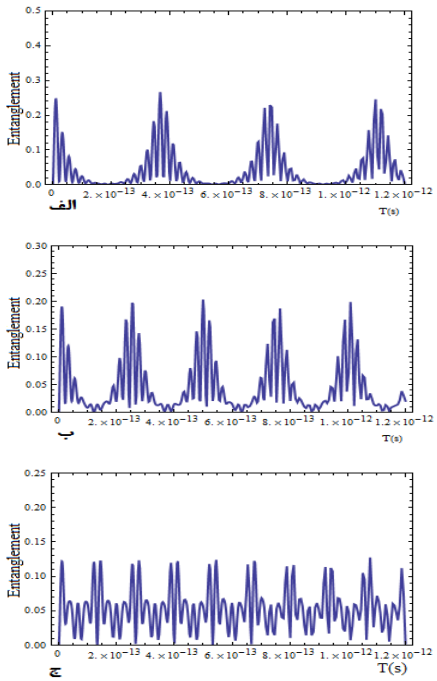
[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06 ]

با نزدیک شدن به فرکانس تشدید، این دوره تناوب کوچک می‌شود و کم کم از بین می‌رود. علت این امر نزدیک شدن به فرکانس تشدید می‌باشد. پس از تشدید درهم‌تنیدگی دچار بی‌نظمی فاحشی خواهد شد.

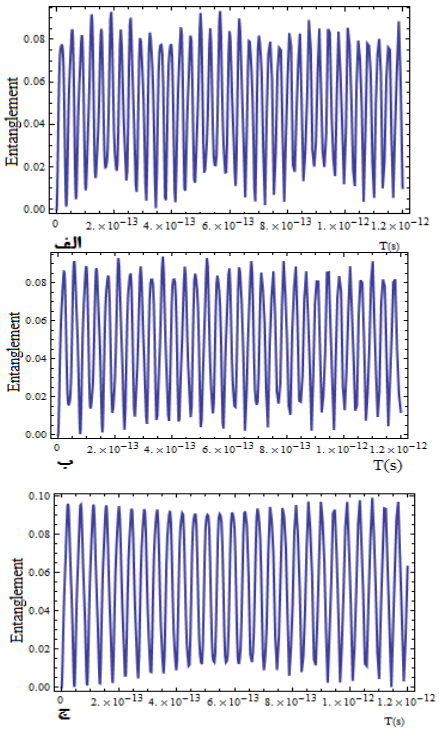
از طرف دیگر همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود در فرکانس‌های بزرگتر از فرکانس تشدید، با دور شدن از فرکانس تشدید، بیشینه درهم‌تنیدگی با افزایش فرکانس، افزایش می‌یابد. در این‌جا نیز درهم‌تنیدگی از نظمی خاص، مانند حالت قبل از تشدید، پیروی نمی‌کند.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله نشان دادیم که درهم‌تنیدگی حالت‌های الکترون $\pi$ و فوتون شدیدا به فرکانس میدان الکترومغناطیسی وابسته است. رفتار درهم‌تنیدگی قبل و بعد از تشدید، متفاوت است: قبل از تشدید افزایش فرکانس فوتونی باعث کاهش درهم‌تنیدگی شده، درحالیکه پس از تشدید این افزایش موجب افزایش درهم‌تنیدگی می‌شود.




شکل ۱: درهم‌تنیدگی بر حسب زمان به ازای فرکانس‌های فوتونی ($\omega_0$): الف- $\frac{\omega_0}{\Omega}=۰/۱۷$ ب- $\frac{\omega_0}{\Omega}=۰/۲۵$ ج- $\frac{\omega_0}{\Omega}=۰/۴۷$




شکل ۲: درهم‌تنیدگی بر حسب زمان به ازای فرکانس‌های فوتونی ($\omega_0$): الف- $\frac{\omega_0}{\Omega}=۱$ ب- $\frac{\omega_0}{\Omega}=۱/۲$ ج- $\frac{\omega_0}{\Omega}=۱/۴$

## مراجع


[1] Hu, T., Xue, K., Sun, C., Wang, G., Ren, H, *Quantum Teleportation and dense coding via topological basis*, **Quantum Information Process**, Springer, (2013).

[2] Zhang, Y. L.,Wang,Y. N., Xiao, X. R., Jing, L., Mu, L. Z., Korepin, V. E., Fan, H, *Quantum network teleportation for aquantum information distribution and concentration*, **Phys Rev A**, vol. 87, 022302, (2013).

*[3]* Jorio, A., Saito, R., Drwsselhaus, G., Dresselhaus, M. S, *Raman Spectroscopy in Graphene Related Systems*, WILEY-VCH verlag GmbH & Co.KGaA, (2011)

[4] Ando, T, Theory of Electronic State and transport in Carbon Nanotubes, **Phys.Soc.Jpn**, vol. 74, 777-817, (2005).

*[5]* Ando, T, *Anomaly of Optical Phonon in Monolayer Graphene*, **Phys.Soc.Jpn,** vol. 75, no. 12, 124701-124705, (2006).

*[6]* Grrison, J., Chiao, R, *Quantum Optics*. Oxford University, (2008).

*[7]* Sakurai, J.J., Napolitano, J, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (2011).

*[8]* Lin, H. C, *Local Approach to Quantum Entanglement*, Ph D. Thesis, University College London, (2008).




[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06 ]