بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه خوارزمی،
تهران، ایران.
بهمن ۱۳۹۸ ۱۵-۱۶

# بررسی واپاشی خودبخودی اتم بر دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم یکسان در مدل تاویس-کامینگز

**یسنا علی شمسی، سودا میرزائی، علیرضا چناقلو**

**گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران**

**yasna.alishamsi75@gmail.com**

s.mirzaei@sut.ac.ir

a.chenaghlou@sut.ac.ir

**چکیده : در این مقاله با در نظرگرفتن هامیلتونی مدل تاویس-کامینگز، دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم دو ترازه یکسان که در برهم‌کنش با میدان تابشی کوانتیده تک مد هستند را مطالعه می‌کنیم . مسئله اصلی در فرآیند اطلاعات کوانتومی، ناهمدوسی است که نتیجه جفت‌شدگی سیستم با محیط اطراف خود می‌باشد نظیر نویز، واپاشی خودبخودی اتم و ... که می تواند موجب تخریب درهم‌تنیدگی کوانتومی شود. بنابراین اثرات واپاشی خودبخودی اتم دو ترازه را بر دینامیک درهم تنیدگی بین دو اتم بررسی خواهیم نمود. برای محاسبه مقدار درهم‌تنیدگی، سنجه تلاقی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.**

کلید واژه: تلاقی، در هم‌تنیدگی، مدل تاویس-کامینگز، واپاشی خودبخودی

# Investigation of Spontaneous Decay of Atom on the Entanglement Dynamics Between Two Identical Atoms in the Tavis- Cummings Model

**Yasna Ali Shamsi, Sevda Mirzaei, Alireza Chenaghlou**

**Abstract – In this article, by considering the Tavis-Cummings model Hamiltonian we study the entanglement dynamics between two identical two-level atoms interacting with the single-mode quantized radiation field. The main problem in quantum information processing (QIP) is decoherence that is a result of the coupling of the system to its surrounding environment such as noise, spontaneous decay of atom, and so on which can cause quantum entanglement destruction. Therefore, we will investigate the effects of spontaneous decay of the two-level atom on the dynamics of entanglement between the two atoms. The concurrence measure will be used to evaluate the degree of entanglement.**

Keywords : Concurrence, Entanglement, Spontaneous decay, Tavis-Cummings mod



این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01 ]

## مقدمه

درهم‌تنیدگی در اوایل سال ۱۹۳۵ به عنوان همبستگی میان حالت‌های کوانتومی مطرح شد که یکی از ویژگی‌های شاخص مکانیک کوانتومی است که باعث تمایز فیزیک کوانتومی از فیزیک کلاسیکی می‌شود [۱]. درهم‌تنیدگی کوانتومی، در فناوری‌های کوانتومی نظیر پردازش اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی، دوربری کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... نقش بسزایی دارد. از این رو تولید و بررسی آن مهم می‌باشد. در این راستا تلاش‌های متعددی صورت گرفته است از جمله می‌توان به مدل جینز-کامینگز و تاویس-کامینگز [۲] اشاره کرد. یک پدیده بسیار جالب در تحول زمانی درهم‌تنیدگی پدیده مرگ ناگهانی و تولد ناگهانی درهم‌تنیدگی است که این نام‌گذاری توسط یو[1] و ابرلی[2] انجام گرفته است [۳]. همچنین این پدیده به لحاظ تجربی و نظری توجه افراد زیادی را به خود جلب کرده است. در مرجع [۴]، اندرکنش دو اتم دو ترازه با کاواک تک مده بررسی شده است، که کاواک در حالت خلا و دو اتم در حالت درهم‌تنیده می‌باشند. ملاحظه شد که در اثر تحول، درهم‌تنیدگی بین دو اتم دچار مرگ ناگهانی می‌شود، به‌طوری‌که این افت درهم‌تنیدگی نه تنها به مقدار درهم‌تنیدگی بلکه به فرم حالت اولیه نیز بستگی دارد.

همچنین با توجه به اندرکنش سیستم با محیط اطراف، درهم‌تنیدگی کوانتومی می‌تواند در اثر عوامل محیطی از جمله نویز زمینه، اختلالات کوانتومی، واپاشی اتم و ... تخریب شود که این مسئله مانعی برای تحقق پردازش اطلاعات کوانتومی ($QIP$) است [۵]. ما در این مقاله با در نظر گرفتن مدل تاویس-کامینگز تحول درهم‌تنیدگی و اثر واپاشی خودبخودی اتم را بر تحول زمانی درهم‌تنیدگی مطالعه خواهیم نمود.

[1] Yu
[2] Eberly

## توصیف مدل و تولید حالت درهم‌تنیده

در مدل تاویس-کامینگز سیستمی با دو اتم یکسان $A$ و $B$ که با یک کاواک تک مد در اندرکنش می‌باشد را در نظر می‌گیریم که با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H=\omega(a^{\dagger}a+\frac{1}{2})+\omega\sum_{i=1}^{2}|e_i\rangle\langle e_i| + \lambda\sum_{i=1}^{2}(a\sigma_i^{+}+a^{\dagger}\sigma_i^{-}) \quad (۱)$$

که $a^{\dagger}$ عملگر خلق، $a$ عملگر فنا و $\lambda$ ثابت جفت‌شدگی اتم-کاواک بوده، $\omega$ فرکانس میدان و $\sigma_i$ ها نیز عملگرهای اتمی هستند، که برابرند با:

$$\sigma_i^{+}=|e\rangle\langle g| \qquad \sigma_i^{-}=|g\rangle\langle e| \quad (۲)$$

که $|g\rangle$ حالت پایه و $|e\rangle$ حالت برانگیخته‌ی اتم می‌باشد. عملگرهای خلق و فنا روی میدان اثر می‌کنند و تعداد فوتون را افزایش یا کاهش می‌دهند ولی عملگرهای اتمی روی اتم اثر کرده و آن را به حالت برانگیخته می‌برند یا به حالت پایه بر می‌گردانند.

تابع موج حالت اولیه برای دو اتم برابراست با:

$$|\psi_0\rangle=a|eg0\rangle+b|ge0\rangle+c|gg1\rangle \quad (۳)$$

که به علت به‌هنجار بودن تابع موج داریم:

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$$

واضح است که در رابطه (۳) اتم‌های $A$ و $B$ را نمی‌توان از هم جدا کرد، پس دو اتم در حالت اولیه کاملا درهم‌تنیده هستند که با میدان درون کاواک در اندرکنش می‌باشند.

با اثر عملگر تحول زمانی روی حالت اولیه‌ی تابع موج، حالت تابع موج برای هر زمان دلخواه $t$ به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle=x_1|eg0\rangle+x_2|ge0\rangle+x_3|gg1\rangle \quad (۴)$$

با جایگذاری هامیلتونی از رابطه‌ی (۱) و تابع موج از رابطه‌ی (۴) در معادله‌ی شرودینگر ($\hbar=1$)



این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01 ]

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}=H|\psi(t)\rangle \qquad (۵)$$

پس از محاسبات لازم، ضرایب رابطه‌ی (۴) به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_1=e^{-i\frac{3}{2}\omega t}[\frac{1}{2}a(\cos\theta+1)+\frac{1}{2}b(\cos\theta-1)-\frac{1}{\sqrt{2}}ic(\sin\theta)]$$
$$x_2=e^{-i\frac{3}{2}\omega t}[\frac{1}{2}a(\cos\theta-1)+\frac{1}{2}b(\cos\theta+1)-\frac{1}{\sqrt{2}}ic(\sin\theta)]$$
$$x_3=e^{-i\frac{3}{2}\omega t}[-\frac{1}{2}ia(\sin\theta)-ib(\sin\theta)+c(\cos\theta)] \qquad (۶)$$

که $\theta=\sqrt{2}\lambda t$. ماتریس چگالی برای تابع موج که در رابطه‌ی (۴) نوشته شده است، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_{tot}=|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \qquad (۷)$$

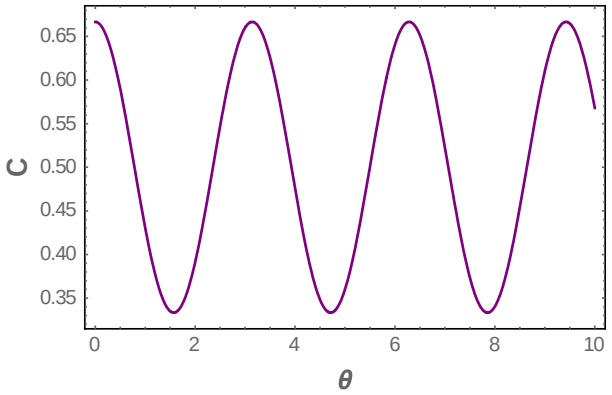
با رد جزئی گرفتن روی حالت میدان از رابطه‌ی فوق، ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی اتم‌های $A$ و $B$ در پایه‌های استاندارد $\{|ee\rangle,|eg\rangle,|ge\rangle,|gg\rangle\}$ بصورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho^{AB}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&|x_1|^2&x_1x_2^*&0\\0&x_2x_1^*&|x_2|^2&0\\0&0&0&|x_3|^2\end{pmatrix} \qquad (۸)$$

برای محاسبه‌ی مقدار درهم‌تنیدگی برای حالت آمیخته‌ی دو کیوبیتی، از سنجه‌ی تلاقی استفاده خواهیم نمود[۳]. برای ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی فوق، سنجه‌ی تلاقی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$c(\rho^{AB})=2\max\{0,|x_1x_2^*|\} \qquad (۹)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۶) در رابطه‌ی (۹) می‌توان مقدار درهم‌تنیدگی بین دو اتم را به‌دست آورد. در شکل (۱) نمودار تلاقی بصورت تابعی از زمان بدون بعد $\theta=\sqrt{2}\lambda t$ رسم شده است.




شکل ۱: نمودار تلاقی بر حسب زمان به ازای $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

از نمودار ملاحظه می‌شود که در لحظه‌ی $t=0(\theta=0)$ درهم‌تنیدگی بیشینه بوده و با گذر زمان به مقدار کمینه کاهش می‌یابد و به این ترتیب شاهد یک رفتار نوسانی برای درهم‌تنیدگی هستیم. به‌علاوه ملاحظه می‌شود که درهم‌تنیدگی در هیچ زمانی از بین نمی‌رود. همچنین با تغییرات مقادیر $a$، $b$ و $c$ مقدار درهم‌تنیدگی تغییر خواهد نمود که نشان می‌دهد دینامیک درهم‌تنیدگی وابسته به شرایط اولیه می‌باشد.

## اثر واپاشی خود بخودی اتم بر دینامیک درهم-تنیدگی بین دو اتم

در این قسمت می‌خواهیم اثر واپاشی خودبخودی اتم بر دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم را مطالعه کنیم. واپاشی به این معنی است که اتم از حالتی با تراز بالاتر به حالتی با تراز پایین تر گذار کند، به‌طوری‌که دینامیک هر اتم در واپاشی بصورت زیر توصیف می‌شود:

$$D|g\rangle|0\rangle_E=|g\rangle|0\rangle_E$$
$$D|e\rangle|0\rangle_E=\sqrt{1-p}|e\rangle|0\rangle_E+\sqrt{p}|g\rangle|1\rangle_E \qquad (۱۰)$$

که $D$ عملگر واپاشی، $p$ دامنه واپاشی و $E$ معرف مد محیط است.

فرض می‌کنیم اتم $A$ تحت واپاشی خودبخودی قرارگیرد. حال اگر دو اتم درحالت پایه باشد حالتش را حفظ می‌کند بدون اینکه فوتونی آزاد کند، و اگر در حالت برانگیخته باشد با احتمال $\sqrt{1-p}$ در همان حالت باقی می‌ماند و با



این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01 ]

احتمال $\sqrt{p}$ با آزاد کردن یک فوتون به حالت پایه برمی‌گردد.

با جایگذاری تغییرات بدست آمده برای حالت‌های اتم $A$ تابع موج کلی سیستم را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|\psi(t)\rangle = x_1\sqrt{1-p}\,|eg0\rangle|0\rangle_E + x_1\sqrt{p}\,|gg0\rangle|1\rangle_E + x_2\,|ge0\rangle|0\rangle_E + x_3\,|gg1\rangle|0\rangle_E \quad (۱۱)$$

باید توجه داشت که $0\le p\le 1$ می‌باشد که $p=1$ واپاشی بیشینه و $p=0$ عدم واپاشی را نشان می‌دهد.

ماتریس چگالی برای تابع موج (۳) با در نظر گرفتن واپاشی اتم $A$ و با رد جزئی گرفتن روی حالت میدان و محیط ( $F$ و $E$ ) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho^{AB} = Tr_{F,E}(\rho_{tot}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)|x_1|^2 & \sqrt{1-p}\,x_1x_2^* & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p}\,x_2x_1^* & |x_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |x_3|^2+p|x_1|^2 \end{pmatrix} \quad (۱۲)$$

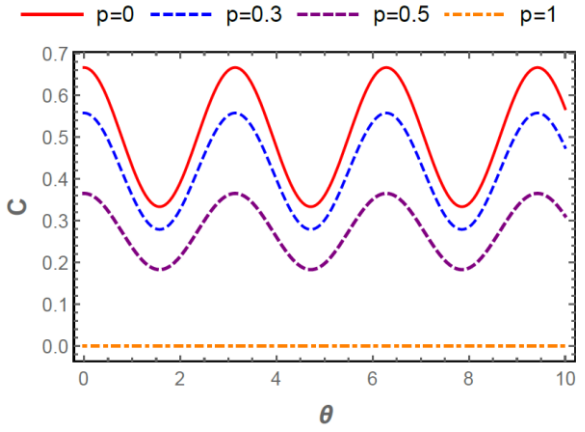
تلاقی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$c(\rho^{AB}) = 2\max\{0,|\sqrt{1-p}x_1x_2^*|\} \quad (۱۳)$$

که در شکل (۲) رفتار دینامیک درهم‌تنیدگی به ازای $p$ های مختلف رسم شده است. با توجه به شکل (۲) درمی‌یابیم که در زمان $t=0(\theta=0)$ درهم‌تنیدگی بیشینه مقدار خود را دارد. با گذر زمان درهم‌تنیدگی کاهش یافته و به کمینه مقدار می‌رسد و این روند به‌طور نوسانی ادامه دارد. به ازای $p=0$ هیچ واپاشی رخ نداده و نمودار با شکل (۱) هم‌خوانی دارد. درحالی‌که با افزایش مقدار $p$ درهم‌تنیدگی بین دو اتم تضعیف می‌شود و رفته رفته به صفر میل می‌کند، به‌طوری‌که به ازای $p=1$ که واپاشی به حداکثر مقدار خود می‌رسد، درهم‌تنیدگی برابر صفر می‌شود. به‌علاوه ملاحظه می‌شود که دوره تناوب نمودار برای تمام $p$ ها ثابت می‌ماند.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله اندرکنش دو اتم دو ترازه با میدان تک مد در




شکل۲: نمودار تلاقی بر حسب زمان به ازای $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

مدل تاویس-کامینگز را در نظر گرفته و دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم را با استفاده از سنجه‌ی تلاقی مورد مطالعه قرار دادیم. نتایج نشان داد که درهم‌تنیدگی رفتار نوسانی با زمان داشته و در هیچ زمانی صفر نیست. به‌علاوه مقدار درهم‌تنیدگی وابسته به حالت اولیه می‌باشد. همچنین اثر واپاشی خودبخودی اتم $A$ در کاواک بررسی شد. ملاحظه شد که در اثر واپاشی اتم، مقدار درهم‌تنیدگی بین دو اتم کاهش می‌یابد، به‌طوری‌که به ازای $p=1$ یعنی بیشینه واپاشی، درهم‌تنیدگی به مقدار صفر تنزل می‌یابد. این نشان می‌دهد که واپاشی به عنوان یک عامل محیطی در تخریب درهم‌تنیدگی نقش مهمی دارد.

## مرجع‌ها

**[1]** A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen; "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?"; *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.

**[2]** E.T. Jaynes and F.W. Cummings; "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser"; *Proc. IEEE* **51** (1963).

**[3]** T. Yu, J.H. Eberly; *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 140404.

**[4]** Q. Yang, M. Yang, Z.L. Cao; "Initial Tripartite Entangled State in the Tavis-Cummings Model"; *Chin. Phys. Lett.* **25** (3) (2008) 825.

**[5]** L. Davidovich; "From quantum to classical: Schrödinger cats, entanglement, and decoherence"; *Phys. Scr.* **91** (2016) 063013.



این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01 ]