بیست‌وپنجمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و یازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شیراز،
شیراز، ایران.
۹-۱۱ بهمن ۱۳۹۷

حالت‌های همدوس گرمایی متناظر با گروه‌های لی: ویژگی‌های غیرکلاسیکی

فتانه زهتاب‌زاده[۱]؛ محمّدجواد فقیهی[۱] و حمیدرضا باغشاهی[۲]

[۱]گروه فوتونیک، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان
[۲]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده- حالت‌های همدوس گرمایی رده مهمی از حالت‌های تابشی هستند که از ترکیب حالت همدوس استاندارد و حالت گرمایی پدید می‌آیند. در رویکرد غیرخطّی این رده از حالت‌ها، عملگرهای نابودی و آفرینش جای خود را به همتای غیرخطّی خود می‌دهند. در این مقاله پس از معرّفی حالت‌های همدوس گرمایی متناظر با گروه‌های $SU(1,1)$ و $SU(2)$، ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلید واژه- حالت گرمایی، حالت همدوس $SU(1,1)$، حالت همدوس $SU(2)$، تابع توزیع هوسیمی.

Thermal coherent states associated with Lie groups: Nonclassical properties

Fataneh Zehtabzadeh[1], Mohammad Javad Faghihi[1] and Hamid Reza Baghshahi[2]

[1]Department of Photonics, Faculty of New Science & Technology, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman
[2]Department of Physics, Faculty of Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract- Thermal coherent states are important classes of radiation fields composed of standard coherent state and thermal state. In nonlinear treatment, annihilation and creation operators are replaced by their nonlinear counterparts. In this paper, after introducing thermal coherent states corresponding to $SU(1,1)$ and $SU(2)$ Lie groups, their nonclassical properties are studied.

Keywords: Thermal state, $SU(1,1)$ Coherent state, $SU(2)$ Coherent state, Husimi distribution function.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-30]

مقدّمه

نظر به این که اثرات گرمایی غیر قابل اجتناب هستند تابش گرمایی می‌تواند به عنوان نوفه در سیگنال‌های همدوس به حساب آید. این تابش با دمای تعادلی T از چشمه فوتون‌های گرمایی توصیف می‌شود. اولین بار در سال ۱۹۶۵ حالت‌های گرمایی جابجاشده توسط گلاوبر و لاخس مطرح شدند. عملگر چگالی مربوط حالت‌های گرمایی در فضای حالت‌های عددی برای میدان تک مد با رابطه زیر مشخص می‌شود [۱]:

$$\hat{\rho}_t = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n| \qquad (۱)$$

$\bar{n}$ میانگین تعداد فوتون‌های گرمایی است. حالت همدوس استاندارد به عنوان حالت خلأ جابجاشده با عملگر جابجایی $\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\right)$ تعریف می‌شود که در آن $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش بوزونی هستند. میدان تابشی در حالت همدوس استاندارد در فضای عددی با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \qquad (۲)$$

که درآن α یک عدد مختلط است. از تأثیر عملگر جابجایی از سمت چپ و همیوغ مختلط آن از سمت راست روی عملگر چگالی $\hat{\rho}_t$، حالت همدوس گرمایی به صورت زیر پدید می‌آید:

$$\hat{\rho}_d = \hat{D}(\alpha) \hat{\rho}_t \hat{D}^\dagger(\alpha) \qquad (۳)$$

با قرار دادن رابطه (۱) در (۳) برای حالت همدوس گرمایی به صورت زیر داریم:

$$\hat{\rho}_d = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n |n,\alpha\rangle\langle n,\alpha| \qquad (۴)$$

که در آن $|n,\alpha\rangle$ حالت عددی جابجاشده هستند و با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$|n,\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} \right) \times \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\alpha^*)^{n-m} L_m^{n-m}\left(|\alpha|^2\right)|m\rangle, & m \le n \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}\left(|\alpha|^2\right)|m\rangle, & m > n \end{cases} \qquad (۵)$$

در این مقاله، با تعمیم گروهی حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس گرمایی مربوط به گروه‌های $SU(1,1)$ و $SU(2)$ معرّفی می‌شوند و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

حالت همدوس: تعمیم گروهی

اهمیّت حالت‌های همدوس به خاطر تعمیم‌هایی از آن‌ها که ویژگی‌های غیرکلاسیکی از خود بروز می‌دهند دو چندان می‌شود. حالت همدوس غیرخطّی یکی از مهم‌ترین تعمیم‌های حالت همدوس استاندارد است که در آن عملگرهای نابودی و آفرینش بوزونی با همتای تعمیم‌یافته خود جایگزین می‌شوند. این حالت‌ها رابطه ویژه مقداری $\hat{A}|\alpha, f\rangle = \alpha|\alpha, f\rangle$ را برآورده می‌کنند که در آن $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $f(\hat{n})$ نشان‌دهنده یک تابع عملگر- مقدار وابسته به شدّت است. نمایش حالت‌های همدوس غیرخطّی در فضای حالت‌های عددی به شکل زیر است [۲]:

$$|\alpha, f\rangle = N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{[f(n)]!\sqrt{n!}} |n\rangle, \qquad N_f = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^2}{n![f(n)]!^2} \right)^{-1/2} \qquad (۶)$$

که در آن $[f(n)]! = f(n) f(n-1) \ldots f(1)$ و $[f(0)]! = 1$. با توجّه به رابطه (۲) که الگویی را به‌صورت خلأ جابجاشده برای حالت‌های همدوس معرّفی می‌کند، تلاش می‌شود حالت‌های همدوس غیرخطّی نیز به صورت خلأ جابجاشده با عملگر جابجایی تعمیم‌یافته بیان گردد. ازآن‌جا که رابطه جابجایی عملگرهای تعمیم‌یافته بوزونی

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-30]

مربوط به نوسانگر غیرخطّی رابطه جابجایی مشابهی با عملگرهای خطّی ندارد، در نتیجه تأثیر عملگر جابجایی غیرخطّی که از تعمیم جبری عملگرهای نابودی و آفرینش حاصل می‌شود، روی حالت خلأ نمی‌تواند به بسط صریحی در فضای عددی منجر شود. برای غلبه بر این مشکل سازوکارهایی وجود دارد که یکی از آن‌ها پیش از این گزارش شده است [۳]. راه‌کار مناسب در این‌جا مبتنی بر رهیافت گروهی است. به منظور دست‌یابی به سامانه‌های تابشی غیرخطّی مبتنی بر نظریه گروه، حالت‌های همدوس $SU(1,1)$ و $SU(2)$ مورد توجّه هستند.

حالت‌های همدوس $SU(1,1)$

با استناد به رهیافت مانکو، تابع غیرخطّی متناظر با طیف تابشی مربوط به پتانسیل مثلثاتی $V(x)=U_0\tan^2(bx)$، که در آن U_0 شدت پتانسیل و b دامنه میدان است به‌صورت زیر خواهد بود [۴]:

$$f^{SU(1,1)}(n)=\sqrt{\frac{\mathrm{h}b^2}{2\mu\varepsilon}(n+2\lambda-1)} \qquad (۷)$$

در این تابع، ε بیان‌گر بسامد میدان، μ مشخص کننده جرم کاهش‌یافته ذره و λ پارامتر مربوط به قدرت پتانسیل است که می‌توان مقادیر صحیح و نیمه‌صحیح اختیار کند به‌طوری که $\lambda(\lambda+1)=2\mu U_0/\mathrm{h}^2b^2$. از نقطه‌نظر حالت‌های همدوس غیرخطّی تابع وابسته به‌شدّت رابطه (۷) با حالت‌های همدوس $SU(1,1)$ در ارتباط است. با توجّه به جبر لی $su(1,1)$، حالت‌های همدوس $SU(1,1)$ را می‌توان با تأثیر عملگر جابجایی متناظر با این گروه در حالت خلأ به‌دست آورد (مشابه با حالت‌های همدوس استاندارد). بنابراین عملگر جابجایی $SU(1,1)$ به‌صورت $\hat{D}_f^{\,su(1,1)}(\alpha)=\exp\left(\xi\hat{K}_+-\xi^*\hat{K}_-\right)$ به‌دست می‌آید که در آن $\xi=\sqrt{\mathrm{h}b^2/2\mu\varepsilon}\,\alpha$، $\hat{K}_+=\sqrt{2\mu\varepsilon/\mathrm{h}b^2}\,\hat{A}^\dagger_{SU(1,1)}$ و $\hat{K}_-=\sqrt{2\mu\varepsilon/\mathrm{h}b^2}\,\hat{A}_{SU(1,1)}$ [۵].

حالت‌های همدوس $SU(2)$

به‌طور مشابه با حالت‌های همدوس $SU(1,1)$، با درنظرگرفتن پتانسیل پوشل-تلر تصحیح‌شده به صورت $V(x)=U_0\tanh^2(bx)$، تابع غیرخطّی متناظر با طیف تابشی این پتانسیل به صورت زیر است [۴]:

$$f^{SU(2)}(n)=\sqrt{\frac{\mathrm{h}b^2}{2\mu\varepsilon}(2\lambda-n+1)} \qquad (۸)$$

که این تابع غیرخطّی با حالت‌های همدوس $SU(2)$ در ارتباط است. عملگر جابجایی مربوط به گروه $SU(2)$ به‌صورت $\hat{D}_f^{\,SU(2)}(\alpha)=\exp\left(\xi\hat{k}_+-\xi^*\hat{k}_-\right)$ خواهد بود که در آن، $\hat{k}_+=\sqrt{2\mu\varepsilon/\mathrm{h}b^2}\,\hat{A}^\dagger_{SU(2)}$ و $\hat{k}_-=\sqrt{2\mu\varepsilon/\mathrm{h}b^2}\,\hat{A}_{SU(2)}$.

حالت‌های همدوس گرمایی گروهی

حالت‌های همدوس گرمایی گروهی از ترکیب عملگرهای جابجایی گروهی و عملگر چگالی حالت‌های گرمایی به‌دست می‌آیند. با توجه به معرّفی عملگرهای جابجایی گروه‌های $SU(1,1)$ و $SU(2)$، دو رده مختلف از حالت‌های همدوس گرمایی غیرخطّی به صورت زیر معرّفی می‌شوند:

$$\hat{\rho}_d^{\,SU(1,1)}=\hat{D}_f^{\,SU(1,1)}(\alpha)\hat{\rho}_t\hat{D}_f^{\dagger\,SU(1,1)}(\alpha)$$
$$\hat{\rho}_d^{\,SU(2)}=\hat{D}_f^{\,SU(2)}(\alpha)\hat{\rho}_t\hat{D}_f^{\dagger\,SU(2)}(\alpha) \qquad (۹)$$

بررسی ویژگی غیرکلاسیکی

تابع توزیع هوسیمی ابزاری برای توصیف سامانه‌های تابشی کوانتومی است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$Q(\alpha,\alpha^*)=\frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا $|\alpha\rangle$ حالت همدوس استاندارد و $\hat{\rho}$ عملگر چگالی متناظر با سامانه تابشی است. از تابع توزیع هوسیمی به عنوان ابزاری برای بررسی چلاندگی سامانه تابشی استفاده می‌شود [۷]. یادآوری می‌شود، در اپتیک کوانتومی، چلاندگی به معنی کاهش افت‌وخیزهای یکی از

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

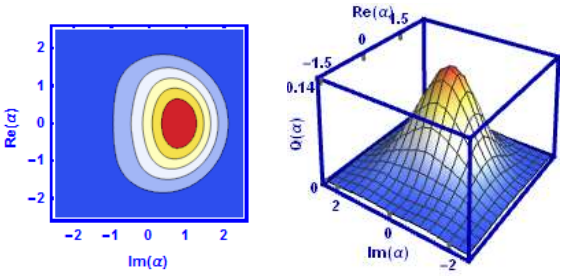
[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-30]

کوادراتورهای میدان (کمتر از حالت همدوس یا خلاء) به بهای افزایش افت‌وخیزهای کوادراتور دیگر است. در این‌جا با قراردادن عملگر چگالی مربوط به حالت همدوس گرمایی غیرخطّی $SU(2)$ داریم:

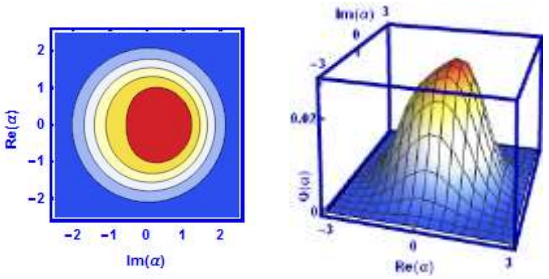
(۱۱)

$$Q(\alpha,\alpha^*)=\frac{1}{\pi(\bar{n}+1)}e^{\left(-|\alpha|^2\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n\left|\sum_{m=0}^{s-1}\sum_{p=0}^{\min[m,n]}\frac{|\alpha|^{2m}}{\sqrt{m!}}d_{mp}\right|^2,$$

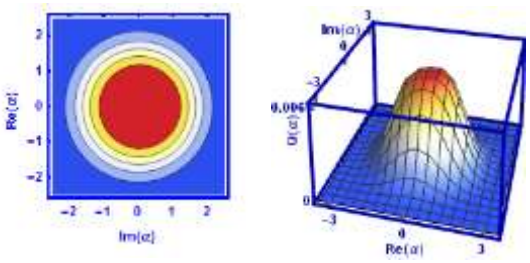
$$d_{mp}=\left(\frac{1}{1+|\varsigma|^2}\right)^{\lambda}\times\frac{\left(-\varsigma^*\right)^m(\varsigma)^n\sqrt{m!n!}\left(\frac{-|\varsigma|^2}{1+|\varsigma|^2}\right)^{(-p)}}{p!(n-p)!(m-p)!}\times\frac{[f(n)]![f(m)]!}{[f(p)]!^2}$$



شکل۱: تابع توزیع هوسیمی و نمودار کنتور متناظر با آن به ازای $\alpha=x+iy$ ، $\bar{n}=1$ ، $\varsigma=0.5$ و $\lambda=3$



شکل۲: تابع توزیع هوسیمی و نمودار کنتور متناظر با آن به ازای $\alpha=x+iy$ ، $\bar{n}=10$ ، $\varsigma=0.5$ و $\lambda=3$



شکل۳: تابع توزیع هوسیمی و نمودار کنتور متناظر با آن به ازای $\alpha=x+iy$ ، $\bar{n}=50$ ، $\varsigma=0.5$ و $\lambda=3$

در شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) تابع توزیع هوسیمی به ازای مقادیر مختلف میانگین تعداد فوتون‌های گرمایی رسم شده است. هم‌چنین نمودار کنتور متناظر با هر حالت نیز به تصویر کشیده شده است. نمودار کنتور شکل (۱) که برای حالت $\bar{n}=1$ است به‌روشنی نشان می‌دهد، سامانه تابشی در کوادراتور $\hat{y}$ چلانده است. هم‌چنین با توجّه به افزایش تعداد میانگین فوتون‌های گرمایی در شکل‌های (۲) و (۳)، دیده می‌شود که رفته‌رفته چلاندگی سامانه از بین می‌رود و رفتار سامانه‌ی تابشی به سمت رفتار کلاسیکی میل می‌کند، آن طور که مورد انتظار است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، با تعمیم جبری عملگر جابجایی و با توجّه به حالت‌های گرمایی معرّفی شده توسط گلاوبر-لاخس، حالت‌های همدوس گرمایی $SU(1,1)$ و $SU(2)$ معرّفی شدند. نتایج عددی نشان دادند که با افزایش تعداد میانگین فوتون‌های گرمایی رفتار سامانه تابشی از غیرکلاسیکی (چلاندگی در راستای $\hat{y}$) به سمت کلاسیکی میل می‌کند.

مراجع

[1] S. Sivakumar, “Effect of thermal noise on atom-field interaction: Glauber-Lachs versus mixing”, Eur. Phys. J. D., Vol. 66, No. 10, pp. 277, 2012.

[2] V.I. Man'ko, G. Marmo, E.C.G. Sudarshan and F. Zaccaria, “*f*-oscillators and nonlinear coherent states”, Phys. Scr.Vol., Vol. 55, pp. 528-541, 1997.

[۳] مظاهری ز.، فقیهی م.ج. و باغشاهی ح.ر. «حالت همدوس تغییرشکل‌یافته از نگاه تابع توزیع ویگنر»، بیست‌وچهارمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران، دانشگاه شهرکرد، ۱۳۹۶.

[4] M.M. Nieto, “Exact wave-function normalization constants for the $B_o\tanh z$-$U_0\cosh^{-2}z$ and Pöschl-Teller potentials”, Phys. Rev. A., Vol. 17, No. 4, 1978.

[5] S.R. Miry and M.K. Tavassoly, “Generation of a class of SU(1,1) coherent states of the Gilmore–Perelomov type and a class of SU(2) coherent states and their superposition ”, Phys. Scr., Vol. 85, pp. 6, 2012.

[6] S.A.M. Vamegh and M.K. Tavassoly, “Nonclassicality of new class of states produced by superposition of two nonlinear squeezed states with respective phase φ ”, Rep. Math. Phys.,Vol. 75, No. 2, pp. 149, 2015.

[7] Z. Ficek, M.R Wahiddin, *Quantum Optics for Beginners*, CRC Press, 2014.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-30]