تحلیل ناپایداری اختلال فصل مشترک سیال های متحرک با چگالی متغیر

رقیه آشوری*، احمد مهرآمیز و سمانه مجازی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین

چکیده – در این پژوهش تاثیر میدان مغناطیسی بر ناپایداری فصل مشترک بین دو سیال نیمه متناهی برای دو حالت چگالی ثابت و متغیر بررسی می شود. از معادلات مگنتوهیدرودینامیک برای رسیدن به رابطه ای کلی برای دامنه اختلال در نزدیکی فصل مشترک استفاده می شود. نتایج نشان می دهند که دامنه اختلال برای هردو حالت چگالی ثابت و متغیر تابعیت زمانی یکسانی دارد. از سوی دیگر تابعیت مکانی دامنه اختلال سیال های چگالی ثابت افت نمایی دارد درحالیکه برای حالت چگالی متغیر به علت حضور یک تابع فوق هندسی در پاسخ افت شدیدتری دارد.

کلید واژه- مگنتوهیدرودینامیک، ناپایداری، اختلال

Instability analysis of the interface perturbation of moving fluids with varying densities

Ahmad Mehramiz and samaneh majazi Roqayeh Ashouri,

Department of Physics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin. Iran.

Abstract-In this study, the effect of magnetic field on the instability of the interface between two semi-infinite fluids of constant density is investigated as well as two semi-infinite fluids of variable density. A general equation for the amplitude of disturbance near the interface is obtained using the MHD equations. The results show that temporal part of the disturbance amplitude for both cases is the same. in the other hand The spatial part of the perturbation amplitude of the fluids with constant densities decreases exponentially while in the case of varying densities it descents faster because of a hypergeometric function in the solution.

Keywords: magnetohydrodynamic, instability, perturbation

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

۱-مقدمه

موضوع ناپایداری در محیط های پلاسمایی از اهمیت زیادی برخوردار است. ناپایداری ها انواع مختلف و منابع گوناگونی دارند یکی از این ناپایداری ها در اثر برخورد موج شوکی به فصل مشترک دو سیال پلاسمایی ایجاد می شود که زمینه مطالعات بسیاری را فراهم کرده است. پژوهش ها نشان می دهند در اثر اصابت موج شوکی به فصل مشترک دو سیال، دامنه اختلال اولیه موجود در فصل مشترک افزایش یافته و ناپایداری اتفاق می افتد[۱]. عواملی از قبیل میدان مغناطیسی، تنش سطح و چسبندگی نیز می توانند مانع رشد دامنه اختلال گردند [۲و۳]. این ناپایداری در زمینه هایی چون اخترفیزیک، سیستم های احتراق و همجوشی مشاهده می شود [۴-۶]. درسیستمی شامل دو سیال با چگالی ثابت حضور میدان مغناطیسی سبب نوسان دامنه ی اختلال می گردد[۷].

در این پژوهش چگالی هر یک از سیالات متغیر و به صورت نمایی در نظر گرفته می شود و در این حالت تابعیت زمانی و مکانی دامنه ی اختلال در نزدیکی فصل مشترک به صورت تحلیلی محاسبه و برآورد نموداری می گردد.

۲- فرضیات و معادلات پایه

پیکربندی اولیه شامل دو شاره پلاسمایی و نیمه متناهی با چگالی جرم های ρ_- و ρ_+ و با سرعت های تعادلی U_- و U_+ و میدان های مغناطیسی B_- و B_+ در راستای y است که در مرز $z=0$ از هم جدا شده اند (شکل۱). در این مرز اختلال اولیه سینوسی وجود دارد. سیال را تراکم ناپذیر درنظر می گیریم ($\nabla.u=0$) در آن لایه های مختلف متحرک هستند و تاثیرات اتلافی در این وضعیت نادیده گرفته می شوند و برای شتاب مدل ضربه ای را در نظر می گیریم. مشخصات تعادلی به شکل زیر فرمول بندی می شوند [۷]:

$$\vec{B}_0 = B_0(Z)\hat{e}_y \quad و \quad \vec{u}_0 = u_0(z)\hat{e}_y \qquad (۱)$$

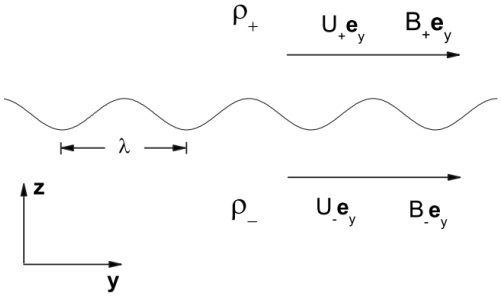
$$Q_0(z) = Q_- + (Q_+ - Q_-)H(z) \qquad (۲)$$

در روابط فوق ، Q نشان دهنده B و ρ و u و $H(z)$ تابع هوی ساید است. برای بررسی دامنه اختلال از معادلات مگنتوهیدرودینامیک به شکل زیر استفاده می شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\rho u = 0 \qquad (۳)$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u.\nabla)u = -\nabla p + J\times B + \rho g \qquad (۴)$$

همچنین سایر معادلات از قبیل قانون آمپر($J = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times B$)، قانون فاراده ($\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\times E$) و اهم ($E+u\times B=0$) معادلات پایه و مورد نیاز برای محاسبات هستند. در روابط فوق j و E به ترتیب چگالی جریان الکتریکی و میدان الکتریکی هستند $g = -\Delta u\delta(t)e_z$ شتاب اعمال شده توسط شوک فرودی است و Δu تغییرات سرعت سطح است. فرض می شود همه ی کمیت ها به فرم $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ باشند، که در آن φ_0 ها مقادیر تعادلی و φ_1 ها مقادیر اختلالی کمیت هارا نشان می دهند. همچنین فرض شده است که اختلال ها فرم سینوسی دارند.



شکل۱. تصویر شماتیک از شرایط اولیه سیستم. دو سیال نیمه متناهی با چگالی جرم های ρ_+ و ρ_- با سرعت های تعادلی افقی U_- و U_+ و میدان های مغناطیسی B_- و B_+ در راستای y . فصل مشترک در z=0 قرار دارد.

۳-محاسبات

مقادیر تعادلی و اختلالی کمیت ها را در معادلات مگنتو هیدرودینامیک جاگذاری و سپس آن هارا خطی سازی می کنیم . با انجام محاسبات در نهایت رابطه زیر حاصل می گردد:

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

$$ik\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+iku_0\right)u_{1z} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+iku_0\right)u_{1y}+\rho_0 u_{1z}\frac{du_0}{dz}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[k^2B_0B_{1z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(ikB_0B_{1y}+B_{1z}\frac{dB_0}{dz}\right)\right] + ik\rho_1\Delta u\delta(t)=0 \qquad (۵)$$

اختلال فصل مشترک به صورت $\xi(y,z,t)=\bar{\xi}(z,t)e^{iky}$ معرفی می شود که در آن از تعریفی به شکل $\bar{\xi}(z,t)=\eta(t)f(z)$ استفاده شده است. اینک شکل های اختلالی چگالی جرمی و میدان مغناطیسی را بدست آورده و در رابطه (۵) جایگذاری می کنیم، نتیجه چنین خواهد شد:

$$k^2\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+iku_0\right)^2\xi - \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+iku_0\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial z}\right] = -k^2\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\xi+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + k^2\Delta u\frac{d\rho_0}{dz}\xi\delta(t) \qquad (۶)$$

از آنجا که کمیت های تعادلی در طرفین مرز ثابت هستند در رابطه (۶) مشتق این کمیت ها صفر می شود. در ادامه چگالی برای دو حالت ثابت و متغیر بررسی می شود که شکل متغیر آن به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\rho=\rho_0 e^{-\alpha|z|} \qquad (۷)$$

بنابراین با جایگذاری روابط بالا در معادله (۶) در نهایت به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{1}{\eta(t)}\left(\frac{d}{dt}+iku_0\right)^2\eta(t)\left[\rho_0k^2+\frac{d\rho_0}{dz}\frac{d}{dz} - \rho_0\frac{d^2}{dz^2}\right]f(z)=\frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\left[-k^2+\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\mu_0}{B_0^2}\frac{d\rho_0}{dz}\Delta u\ \delta(t)\right]f(z) \qquad (۸)$$

با حل این معادله برای حالت چگالی ثابت تابعیت مکانی دامنه به شکل زیر حاصل می شود:

$$f(z)=\begin{cases}e^{-kz} & z\succ 0\\ e^{+kz} & z\prec 0\end{cases} \qquad (۹)$$

با حل معادله (۸) برای چگالی نمایی و جداسازی متغیرها رابطه زیر حاصل می شود:

$$\frac{\rho_0}{\eta(t)}\left(\frac{d}{dt}+iku_0\right)^2\eta(t)= \frac{-k^2B_0^2}{\mu_0}e^{\alpha z}\frac{\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)f(z)}{\left(\frac{d^2}{dz^2}-\alpha\frac{d}{dz}-k^2\right)f(z)} \qquad (۱۰)$$

برای حل قسمت زمانی (چگالی ثابت) با انتگرال گیری اطراف z=0 از رابطه (۸) و استفاده از رابطه (۹) معادله دیفرانسیل تحول زمانی به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2}+2ik\left(\alpha_+U_+ +\alpha_-U_-\right)\frac{d\eta(t)}{dt} = k^2\left(\alpha_+U_+^2+\alpha_-U_-^2-v_a^2\right)\eta(t) + k\Delta uA_T\eta(t)\delta(t) \qquad (۱۱)$$

در رابطه فوق $\alpha_\pm=\rho_\pm/(\rho_-+\rho_+)$ و عدد آتوود و به شکل $A_T=\alpha_+-\alpha_-$ است . با حل معادله (۱۱) تابعیت زمانی دامنه اختلال به دست می آید:

$$\eta(t)=e^{-i\omega t}\left\{\left[\cosh(\gamma t)+\frac{i\omega+kA_T\Delta u}{\gamma}\sinh(\gamma t)\right]\eta(0)+\frac{\dot{\eta}(0)}{\gamma}\sinh(\gamma t)\right\} \qquad (۱۲)$$

در روابط فوق $\omega=k\left(\alpha_+U_+ +\alpha_-U_-\right)$. نرخ رشد به صورت $\gamma=k\left[\frac{1}{4}\left(1-A_T^2\right)\delta_u^2-v_a^2\right]^{\frac{1}{2}}$ است. $\delta_u=|U_+-U_-|$ نیز سرعت شار برشی نسبی دو لایه است. طبق رابطه (۹) مولفه

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

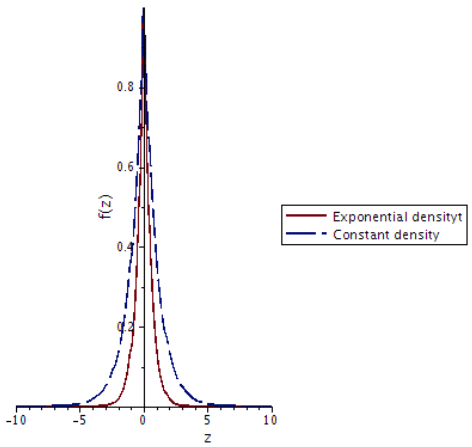
[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

z به صورت نمایی کاهش می یابد. ازطرفی در حضور میدان مغناطیسی و حرکت نسبی ناپایداری زمانی اتفاق می افتد که $\gamma \succ 0$. تحت این شرایط دامنه اختلال با نرخ γ رشد می کند. در غیر این صورت دامنه اختلال نوسان خواهد کرد. تابعیت زمانی دامنه اختلال برای حالت چگالی متغیر به دلیل ثابت بودن چگالی در نزدیکی فصل مشترک، تفاوتی با حالت چگالی ثابت ندارد. برای محاسبه تابعیت مکانی با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۲) به معادله زیر می رسیم:

(۱۳)

$$f(z)=\begin{cases} hypergeom\left(\left[\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4k^2}+2k}{2\alpha},\ \dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4k^2}+2k}{2\alpha}\right],\left[\dfrac{\alpha+2k}{\alpha}\right],-\dfrac{Ce^{+\alpha z}}{a}\right)e^{-kz} & z\succ 0 \\ hypergeom\left(\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4k^2}+2k}{\alpha},\ \dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4k^2}+2k}{2\alpha}\right],\left[\dfrac{\alpha+2k}{\alpha}\right],-\dfrac{Ce^{-\alpha z}}{a}\right)e^{+kz} & z\prec 0 \end{cases}$$

با رسم تابعیت زمانی در دو حالت چگالی ثابت و چگالی نمایی نمودار زیر حاصل می شود:



شکل۲. نمودار تغییرات مکانی دامنه اختلال بر حسب z برای دوحالت چگالی ثابت و نمایی.

نتایج نموداری نشان می دهند که تابعیت z دامنه اختلال برای حالت چگالی متغیر در هر دو طرف مرز سیر نزولی دارد. در حالت چگالی ثابت فقط تابع نمایی نزولی داریم در حالیکه برای سیال با چگالی متغیر علاوه بر تابع نمایی نزولی یک تابع فوق هندسی نیز داریم که در آن ضرب شده و سیر نزولی را بیشتر کرده است.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش محیط پلاسمایی شامل دو سیال با چگالی های متغیر در نظر گفته شد و برای آن دامنه اختلال با فرض فرود شوک بر فصل مشترک مطالعه گردید. نشان داده شد که تابعیت مکانی دامنه اختلال در اطراف فصل مشترک و در حضور میدان مغناطیسی به صورت حاصلضرب توابع نمایی و فوق هندسی افت می کند. به علاوه نشان داده شد که تابعیت زمانی برای هر دو حالت چگالی ثابت و متغیر یکسان است. علاوه بر این مشخص گردید که برای نرخ رشد مثبت دامنه اختلال رشد می کند اما برای نرخ رشد منفی دامنه اختلال رشد ندارد و فقط نوسان می کند. بررسی حالت چگالی ثابت نیز به نتایج پژوهش های پیشین می انجامد.

مراجع

[1] Brouillette, “The richtmyer-meshkov instability”, Annu. Rev. Fluid Mech, Vol. 34, p. 445, 2002.

[2] K. Mikaelian, “Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities in multilayer fluids with surface tension”, Phys. Rev. A, Vol. 42, pp. 11-72, 1990.

[3] K. Mikaelian, “Effect of viscosity on Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities”, Phys. Rev. E, Vol. 47, p. 375, 1993.

[4] Khokhlov, Thomas , Oran, “Numerical simulation of deflagration-to- detonation transition: the role of shock-flame. Combust.Flames”, Vol. 117, pp. 323-339, 1999.

[5] R.Chevalier, “A model for the radio brightness of the supernova remnant 1987a”, Nature, Vol. 355, p. 617, 1992.

[6] P. Chapman, J. Jacobs, “Experiments on the three-dimensional incompressible Richtmyer-Meshkov instability”, phys. fluids, Vol. 18, pp. 074-101, 2006.

[7] J. Cao, Z. Wu, H. Ren, D. Li, “Effects of shear flow and transverse magnetic field on Richtmyer-Meshkov instability”, Phys. Plasmas, Vol. 15, p. 042102, 2008.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]