

حالت‌های همدوس گرمایی تغییر شکل یافته از نگاه تابع توزیع ویگنر

زهرامظاهری^۱؛ محمدجواد فقیهی^۱ و حمیدرضا باغشاهی^۲

^۱گروه فوتونیک، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان
^۲گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده: حالت همدوس گرمایی حالتی مرکب از حالت‌های همدوس استاندارد و گرمایی است که در آن اثرات گرمایی دیده می‌شود. در این مقاله با استفاده از رهیافت جبری حالت‌های همدوس غیر خطی، حالت‌های همدوس گرمایی تغییر شکل یافته معرفی می‌شوند و تابع توزیع ویگنر، به عنوان یکی از مهم‌ترین معیارهای غیر کلاسیکی بودن یک سامانه، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلیدواژه: حالت همدوس گرمایی، حالت همدوس تغییر شکل یافته، تابع توزیع ویگنر

f -deformed thermal coherent states from viewpoint of Wigner distribution function

Zahra Mazaheri¹, Mohammad Javad Faghihi¹ and Hamid Reza Baghshahi²

¹Department of Photonics, Faculty of New Science & Technology, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman

²Department of Physics, Faculty of Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract: Thermal coherent state is composed of standard coherent and thermal states, in which thermal effect is emerged. In this paper, by applying the algebraic treatment of nonlinear coherent states, f -deformed thermal coherent states are introduced and Wigner distribution function, as one of the most important criteria of nonclassicality of a system, is discussed.

Keywords: Thermal coherent state, f -deformed coherent state, Wigner distribution function.

(۵)

۱- سرآغاز

$$|n, \alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)$$

$$\times \begin{cases} N_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\alpha^*)^{n-m} L_m^{n-m}(|\alpha|^2) |m\rangle, & m \leq n \\ N_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}(|\alpha|^2) |m\rangle, & m > n \end{cases}$$

در رابطه بالا $L_k^l(x)$ چندجمله‌های لاگر وابسته و N_1 و N_2 ضرایب بهنجارش هستند. لازم به ذکر است که از حالت همدوس گرمایی می‌توان به‌عنوان یک حالت میانی بین حالت گرمایی (در رابطه (۴)، $\alpha \rightarrow 0$) و حالت همدوس استاندارد (در رابطه (۴)، $\bar{n} \rightarrow 0$) یاد کرد.

۲- حالت همدوس گرمایی تغییر شکل یافته

به‌منظور تعمیم حالت همدوس گرمایی به همتای غیر خطی خود لازم است که در رابطه (۳) عملگر جابجایی تعمیم‌یافته (غیرخطی) را جایگزین عملگر جابجایی استاندارد سازیم. بدین سان، با تعمیم جبری عملگرهای بوزونی به‌صورت $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $\hat{A}^\dagger = f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger$ [۳] عملگرهای جابجایی غیرخطی (تعمیم‌یافته) به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{A}^\dagger - \alpha^* \hat{A}) \quad (6)$$

عملگرهای تعمیم‌یافته بوزونی مربوط به نوسانگر غیرخطی جبر گروه لی را برآورده نمی‌کنند. برای تحقق این امر، عملگرهای دوگان به‌صورت $\hat{B} = \hat{a} f^{-1}(n)$ و $\hat{B}^\dagger = f^{-1}(n) \hat{a}^\dagger$ معرفی می‌شوند که در این صورت روابط جابجایی $[\hat{A}, \hat{B}^\dagger] = [\hat{A}^\dagger, \hat{B}] = \hat{I}$ برقرار هستند [۴]. در نتیجه، با توجه به تعمیم عملگرهای بوزونی مربوط به نوسانگر هماهنگ استاندارد به همتای تغییر شکل یافته خود و همچنین استفاده از عملگرهای دوگان مربوط به آن‌ها، دو تعریف مجزا برای عملگر جابجایی غیر خطی حاصل می‌شود [۵]:

$$\begin{aligned} \hat{D}'_f(\alpha) &= \exp(\alpha \hat{A}^\dagger - \alpha^* \hat{B}) \\ &= \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha \hat{A}^\dagger) \exp(-\alpha^* \hat{B}) \end{aligned} \quad (7)$$

حالت مربوط به هر سامانه فیزیکی که در دمای تعادلی T قرار دارد با حالت گرمایی توصیف می‌شود و عملگر چگالی مربوط به آن در فضای حالت‌های عددی با رابطه زیر مشخص می‌شود [۱]:

$$\hat{\rho}_t = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |n\rangle \langle n| \quad (1)$$

که در آن $\bar{n}$ میانگین تعداد فوتون‌های گرمایی در دمای T است. از طرف دیگر میدان تابشی که در حالت همدوس استاندارد قرار دارد در فضای حالت‌های عددی با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2)$$

که در آن α یک کمیت مختلط است. برای وارد کردن اثرات اجتناب‌ناپذیر حرارتی در تابش همدوس می‌توان یکی از دو روش ترکیب و یا برهم‌نهی گلاوبر-لاخس را برگزید [۲]. این دو روش منجر به تولید دو حالت متمایز، با ویژگی‌های متفاوت می‌شوند. در روش برهم‌نهی گلاوبر-لاخس از عملگر یکانی استفاده می‌شود، بدین ترتیب که:

$$\hat{\rho}_d = \hat{D}(\alpha) \hat{\rho}_t \hat{D}^\dagger(\alpha) \quad (3)$$

در رابطه‌ی بالا $\hat{\rho}_d$ عملگر چگالی حالت همدوس گرمایی و $\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}]$ عملگر جابجایی است. همچنین عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به ترتیب بیانگر عملگر نابودی و آفرینش بوزونی هستند. رابطه (۳) توصیف یک حالت همدوس گرمایی (حالت گرمایی جابجاشده) است که اولین بار توسط گلاوبر و لاخس مطرح شد [۲]. با قرار دادن رابطه (۱) در رابطه (۳) ساختار کلی حالت همدوس گرمایی حاصل می‌شود. از این رو خواهیم داشت:

$$\hat{\rho}_d = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |n, \alpha\rangle \langle n, \alpha| \quad (4)$$

که در آن $|n, \alpha\rangle$ حالت عددی جابجاشده هستند و با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

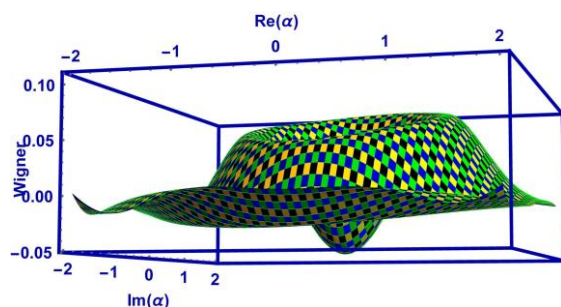
(۱۲)

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi(1+\bar{n})} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n \left| \langle k, \alpha | n, \beta, f \rangle \right|^2 \\ &= \frac{2}{\pi(1+\bar{n})} \exp\left(\frac{-|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n \\ &\quad \left| N_1 N_1' C_{nk}(\alpha, \beta) + N_2 N_2' D_{nk}(\alpha, \beta) \right|^2 \end{aligned}$$

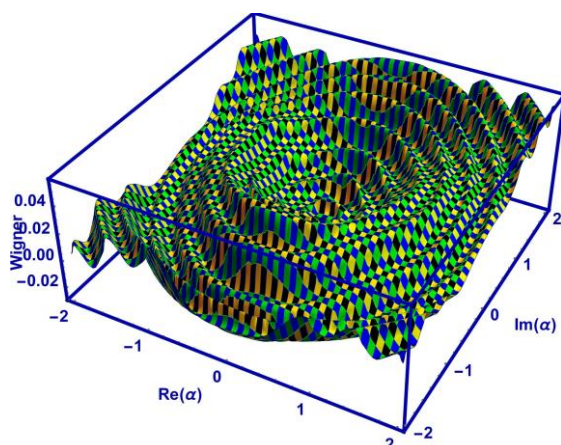
که در آن

(۱۳)

$$\begin{aligned} C_{nk}(\alpha, \beta) &= \sum_{m=0}^{\min[n,k]} \left[\frac{m!}{\sqrt{k!n!}} \frac{f(m)!}{f(n)!} (-\alpha)^{k-m} (-\beta^*)^{n-m} \right. \\ &\quad \left. \times L_m^{k-m}(|\alpha|^2) L_m^{n-m}(|\beta|^2) \right], \\ D_{nk}(\alpha, \beta) &= \sum_{m=\min[n,k]+1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{k!n!}}{m!} \frac{f(n)!}{f(m)!} (\alpha^*)^{m-k} (\beta)^{m-n} \right. \\ &\quad \left. \times L_k^{m-k}(|\alpha|^2) L_n^{m-n}(|\beta|^2) \right] \end{aligned}$$



شکل ۱: تابع توزیع ویگنر به ازای $\bar{n} = 1$ و $f(n) = 1$ ، $\beta = 0.1 + 0.5i$



شکل ۲: تابع توزیع ویگنر به ازای $\bar{n} = 10$ و $f(n) = 1$ ، $\beta = 0.1 + 0.5i$

$$\begin{aligned} \hat{D}_f''(\alpha) &= \exp\left(\alpha \hat{B}^\dagger - \alpha^* \hat{A}\right) \\ &= \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right) \exp\left(\alpha \hat{B}^\dagger\right) \exp\left(-\alpha^* \hat{A}\right) \quad (۸) \end{aligned}$$

با قرار دادن هریک از عملگرهای روابط (۶) و (۷) در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$\hat{\rho}_d'(f) = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n |n, \alpha, f\rangle \langle n, \alpha, f| \quad (۹)$$

$$\hat{\rho}_d''(f) = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n |n, \alpha, f\rangle \langle n, \alpha, f| \quad (۱۰)$$

که در روابط اخیر $|\alpha, f, n\rangle' = \hat{D}_f'(\alpha)|n\rangle$ و $|\alpha, f, n\rangle'' = \hat{D}_f''(\alpha)|n\rangle$ حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطی هستند.

تاکنون دو ساختار کلی برای حالت‌های همدوس گرمایی غیر خطی گلاوبر-لاخس ارائه داده‌ایم. در بخش بعد با انتخاب یکی از این ساختارهای معرفی شده $(\hat{\rho}_d'(f))$ ، غیرکلاسیکی بودن حالت‌های گرمایی غیرخطی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

۳- تابع توزیع ویگنر

نمایش حالت‌های کوانتومی میدان در فضای فاز با توجه به توابع توزیع شبه احتمالی می‌تواند جنبه‌های غیرکلاسیکی بودن آن سامانه‌ی تابشی را روشن سازد. تابع توزیع ویگنر به عنوان اولین تابع توزیع به صورت تبدیل فوریه دوبعدی تابع مشخصه کوانتومی و مرتب شده متقارن $C^{(s)}(\beta, \beta^*) = \text{Tr}(\exp[i\beta \hat{a}^\dagger + i\beta^* \hat{a}] \hat{\rho})$ معرفی شد. می‌تواند در پاره‌ای از نواحی فضای فاز منفی باشد و منفی شدن این تابع به معنی غیرکلاسیکی بودن سامانه‌ی مورد بررسی است. اگرچه برای یک میدان تابشی غیرکلاسیکی، منفی بودن تابع توزیع ویگنر شرط کافی و نه لازم خواهد بود. تابع توزیع ویگنر برای یک سامانه‌ی تابشی تک‌مد با عملگر چگالی $\hat{\rho}$ با رابطه زیر بیان می‌شود [۶]:

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \langle n, \alpha | \hat{\rho} | n, \alpha \rangle \quad (۱۱)$$

از جایگذاری رابطه (۹) در رابطه اخیر خواهیم داشت:

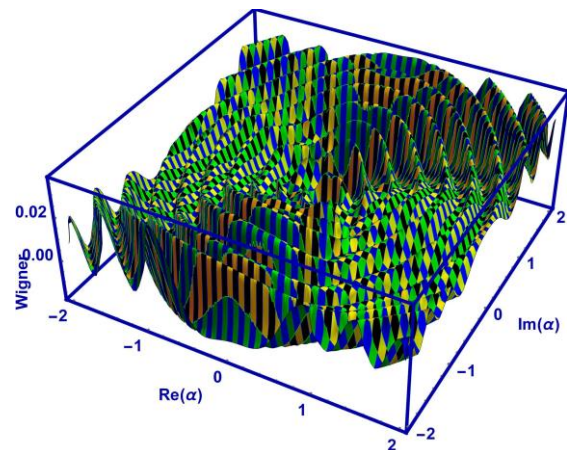
نمودارهای ۱ تا ۶ تابع توزیع ویگنر حالت‌های همدوس گرمایی تغییر شکل یافته را به ازای مقادیر مختلف نشان می‌دهد. شکل ۱ نشان می‌دهد حالت همدوس گرمایی به ازای $\bar{n} = 1$ یک حالت غیر کلاسیکی است چرا که تابع ویگنر در بازه‌ای از فضای فاز منفی است. شکل‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند با افزایش تعداد فوتون‌های گرمایی رفتار غیر کلاسیکی ناپدید می‌گردد. در شکل ۴ تابع توزیع ویگنر در شرایطی رسم شده است که سامانه به حالت همدوس تقلیل می‌یابد و نتیجه به دست آمده با گزارش‌های پیشین در توافق است. شکل‌های ۵ و ۶ تابع ویگنر را برای حالت همدوس گرمایی غیر خطی با تابع $f(n) = \sqrt{n}$ به نمایش می‌گذارند. مشاهده می‌شود که به ازای این تابع، تابع توزیع ویگنر در فضای فاز مثبت و رفتار کلاسیکی نمایان است. لازم به ذکر است که به منظور بررسی رفتار غیر کلاسیکی حالت‌های همدوس گرمایی تغییر شکل یافته، توابع غیر خطی دیگری متناظر با سامانه‌های فیزیکی هم چون اتم‌های هیدروژن گونه، پتانسیل پوشل-تالر و حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده در دست بررسی است.

۴- برداشت

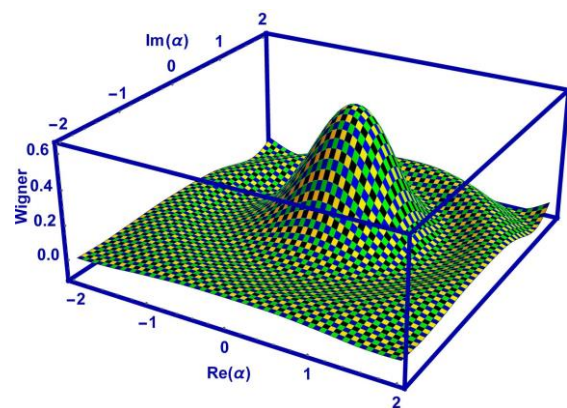
در این مقاله با توجه به اهمیت اثرات حرارتی، یک ساختار کلی برای حالت همدوس گرمایی تغییر شکل یافته ارائه شد. برای نیل به این مهم از تعمیم روش برهم‌نهی گلاوبر-لاخس مربوط به حالت همدوس گرمایی استفاده گردید که نتیجه این امر تولید حالتی میانی بین حالت همدوس غیر خطی و حالت گرمایی غیر خطی است. همچنین، تابع توزیع ویگنر به ازای مقادیر مختلف به بحث گذاشته شد.

باز یاب‌ها

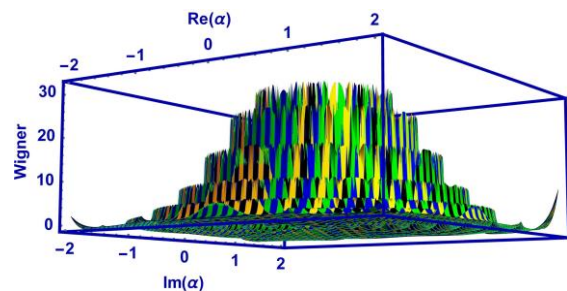
- [1] Gerry C.C. and Knight P.L. "Introductory Quantum Optics", Cambridge University Press, (2005).
- [2] Lachs G., **Phys. Rev. B** 138 (1965) 1012.
- [3] V. I. Man'ko V.I., Marmo G., Sudarshan E.C.G. and Zaccaria F., **Phys. Scr.** 55 (1997) 528.
- [4] Ali S.T., Roknizadeh R. and Tavassoly M.K. **J. Phys. A: Math. Gen.** 37 (2004) 4407.
- [5] Asili Firouzabadi N., Tavassoly M.K. and Faghihi M.J., **Chin. Phys. B** 24 (2015) 0642041.
- [6] Ghorbani M., Faghihi M.J. and Safari H. **J. Opt. Soc. Am. B** 34 (2017) 1884.



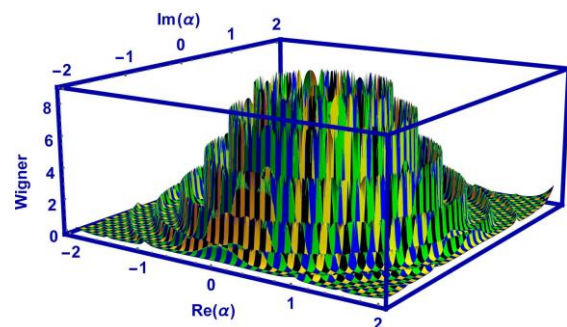
شکل ۳: تابع توزیع ویگنر به ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$, $f(n) = 1$ و $\bar{n} = 50$.



شکل ۴: تابع توزیع ویگنر به ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$, $f(n) = 1$ و $\bar{n} = 0$.



شکل ۵: تابع توزیع ویگنر به ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$, $f(n) = \sqrt{n}$ و $\bar{n} = 1$.



شکل ۶: تابع توزیع ویگنر به ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$, $f(n) = \sqrt{n}$ و $\bar{n} = 50$.