حالت‌های همدوس گرمایی تغییرشکل‌یافته از نگاه تابع توزیع ویگنر

زهرا مظاهری[۱]؛ محمّدجواد فقیهی[۱] و حمیدرضا باغشاهی[۲]

[۱]گروه فوتونیک، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان
[۲]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده: حالت همدوس گرمایی حالتی مرکب از حالت‌های همدوس استاندارد و گرمایی است که در آن اثرات گرمایی دیده می‌شود. در این مقاله با استفاده از رهیافت جبری حالت‌های همدوس غیر خطّی، حالت‌های همدوس گرمایی تغییرشکل‌یافته معرّفی می‌شوند و تابع توزیع ویگنر، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین معیارهای غیرکلاسیکی بودن یک سامانه، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلیدواژه: حالت همدوس گرمایی، حالت همدوس تغییرشکل‌یافته، تابع توزیع ویگنر

f-deformed thermal coherent states from viewpoint of Wigner distribution function

Zahra Mazaheri[1], Mohammad Javad Faghihi[1] and Hamid Reza Baghshahi[2]

[1]Department of Photonics, Faculty of New Science & Technology, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman
[2]Department of Physics, Faculty of Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract: Thermal coherent state is composed of standard coherent and thermal states, in which thermal effect is emerged. In this paper, by applying the algebraic treatment of nonlinear coherent states, *f*-deformed thermal coherent states are introduced and Wigner distribution function, as one of the most important criteria of nonclassicality of a system, is discussed.

Keywords: Thermal coherent state, *f*-deformed coherent state, Wigner distribution function.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

۱- سرآغاز

حالت مربوط به هر سامانه فیزیکی که در دمای تعادلی T قرار دارد با حالت گرمایی توصیف می‌شود و عملگر چگالی مربوط به آن در فضای حالت‌های عددی با رابطه زیر مشخص می‌شود [۱]:

$$\hat{\rho}_t = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n| \qquad (۱)$$

که در آن $\bar{n}$ میانگین تعداد فوتون‌های گرمایی در دمای T است. از طرف دیگر میدان تابشی که در حالت همدوس استاندارد قرار دارد در فضای حالت‌های عددی با رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad (۲)$$

که در آن α یک کمیت مختلط است. برای واردکردن اثرات اجتناب‌ناپذیر حرارتی در تابش همدوس می‌توان یکی از دو روش ترکیب و یا برهم‌نهی گلاوبر-لاخس را برگزید [۲]. این دو روش منجر به تولید دو حالت متمایز، با ویژگی‌های متفاوت می‌شوند. در روش برهم‌نهی گلاوبر-لاخس از عملگر یکانی استفاده می‌شود، بدین ترتیب که:

$$\hat{\rho}_d = \hat{D}(\alpha) \hat{\rho}_t \hat{D}^{\dagger}(\alpha) \qquad (۳)$$

در رابطه‌ی بالا $\hat{\rho}_d$ عملگر چگالی حالت همدوس گرمایی و $\hat{D}(\alpha) = \exp\left[\alpha \hat{a}^{\dagger} - \alpha^* \hat{a}\right]$ عملگر جابجایی است. هم‌چنین عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ به ترتیب بیانگر عملگر نابودی و آفرینش بوزونی هستند. رابطه (۳) توصیف یک حالت همدوس گرمایی (حالت گرمایی جابجاشده) است که اولین بار توسط گلاوبر و لاخس مطرح شد [۲]. با قرار دادن رابطه (۱) در رابطه (۳) ساختار کلی حالت همدوس گرمایی حاصل می‌شود. از این رو خواهیم داشت:

$$\hat{\rho}_d = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^n |n,\alpha\rangle\langle n,\alpha| \qquad (۴)$$

که در آن $|n,\alpha\rangle$ حالت عددی جابجاشده هستند و با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$|n,\alpha\rangle = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} \right) \times \begin{cases} N_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{m!}{n!}} (-\alpha^*)^{n-m} L_m^{n-m}\left(|\alpha|^2\right) |m\rangle, & m \le n \\ N_2 \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n!}{m!}} \alpha^{m-n} L_n^{m-n}\left(|\alpha|^2\right) |m\rangle, & m > n \end{cases} \qquad (۵)$$

در رابطه بالا $L_k^l(x)$ چندجمله‌های لاگر وابسته و N_1 و N_2 ضرایب بهنجارش هستند. لازم به ذکر است که از حالت همدوس گرمایی می‌توان به‌عنوان یک حالت میانی بین حالت گرمایی (در رابطه (۴)، $\alpha \to 0$) و حالت همدوس استاندارد (در رابطه (۴)، $\bar{n} \to 0$) یادکرد.

۲- حالت همدوس گرمایی تغییرشکل‌یافته

به‌منظور تعمیم حالت همدوس گرمایی به همتای غیر خطّی خود لازم است که در رابطه (۳) عملگر جابجایی تعمیم‌یافته (غیرخطّی) را جایگزین عملگر جابجایی استاندارد سازیم. بدین سان، با تعمیم جبری عملگرهای بوزونی به‌صورت $\hat{A} = \hat{a}\, f(\hat{n})$ و $\hat{A}^{\dagger} = f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}$ [۳] عملگرهای جابجایی غیرخطّی (تعمیم‌یافته) به صورت زیر معرّفی می‌شوند:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha \hat{A}^{\dagger} - \alpha^* \hat{A} \right) \qquad (۶)$$

عملگرهای تعمیم‌یافته‌ی بوزونی مربوط به نوسانگر غیرخطّی جبر گروه لی را برآورده نمی‌کنند. برای تحقق این امر، عملگرهای دوگان به‌صورت $\hat{B} = \hat{a}\, f^{-1}(n)$ و $\hat{B}^{\dagger} = f^{-1}(n)\hat{a}^{\dagger}$ معرّفی می‌شوند که در این صورت روابط جابجایی $[\hat{A}, \hat{B}^{\dagger}] = [\hat{A}^{\dagger}, \hat{B}] = \hat{I}$ برقرار هستند [۴]. در نتیجه، با توجّه به تعمیم عملگرهای بوزونی مربوط به نوسانگر هماهنگ استاندارد به همتای تغییرشکل‌یافته‌ی خود و همچنین استفاده از عملگرهای دوگان مربوط به آن‌ها، دو تعریف مجزّا برای عملگر جابجایی غیر خطّی حاصل می‌شود [۵]:

$$\hat{D}'_f(\alpha) = \exp\left(\alpha \hat{A}^{\dagger} - \alpha^* \hat{B} \right) = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2} \right) \exp\left(\alpha \hat{A}^{\dagger} \right) \exp\left(-\alpha^* \hat{B} \right) \qquad (۷)$$

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

$$\hat{D}''_f(\alpha) = \exp\left(\alpha\hat{B}^\dagger - \alpha^*\hat{A}\right) = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\hat{B}^\dagger\right)\exp\left(-\alpha^*\hat{A}\right) \quad (۸)$$

با قرار دادن هریک از عملگرهای روابط (۶) و (۷) در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$\hat{\rho}'_d(f) = \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |n,\alpha,f\rangle'\langle n,\alpha,f|' \quad (۹)$$

$$\hat{\rho}''_d(f) = \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |n,\alpha,f\rangle''\langle n,\alpha,f|'' \quad (۱۰)$$

که در روابط اخیر $|\alpha,f,n\rangle' = \hat{D}'_f(\alpha)|n\rangle$ و $|\alpha,f,n\rangle'' = \hat{D}''_f(\alpha)|n\rangle$ حالت‌های عددی جابجاشده غیرخطّی هستند.

تاکنون دو ساختار کلّی برای حالت‌های همدوس گرمایی غیر خطّی گلاوبر-لاخس ارائه داده‌ایم. در بخش بعد با انتخاب یکی از این ساختارهای معرّفی‌شده $\left(\hat{\rho}'_d(f)\right)$، غیرکلاسیکی‌بودن حالت‌های گرمایی غیرخطّی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

۳- تابع توزیع ویگنر

نمایش حالت‌های کوانتومی میدان در فضای فاز با توجّه به توابع توزیع شبه احتمالی می‌تواند جنبه‌های غیرکلاسیکی‌بودن آن سامانه‌ی تابشی را روشن سازد. تابع توزیع ویگنر به‌عنوان اولین تابع توزیع به‌صورت تبدیل فوریه دوبعدی تابع مشخصه کوانتومی و مرتب‌شده متقارن معرّفی $C^{(s)}(\beta,\beta^*) = \mathrm{Tr}\left(\exp\left[i\beta\hat{a}^\dagger + i\beta^*\hat{a}\right]\hat{\rho}\right)$ شد. می‌تواند در پاره‌ای از نواحی فضای فاز منفی باشد و منفی‌شدن این تابع به معنی غیرکلاسیکی‌بودن سامانه‌ی مورد بررسی است. اگرچه برای یک میدان تابشی غیرکلاسیکی، منفی بودن تابع توزیع ویگنر شرط کافی و نه لازم خواهد بود. تابع توزیع ویگنر برای یک سامانه‌ی تابشی تک‌مد با عملگر چگالی $\hat{\rho}$ با رابطه زیر بیان می‌شود [۶]:

$$W(\alpha,\alpha^*) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\langle n,\alpha|\hat{\rho}|n,\alpha\rangle \quad (۱۱)$$

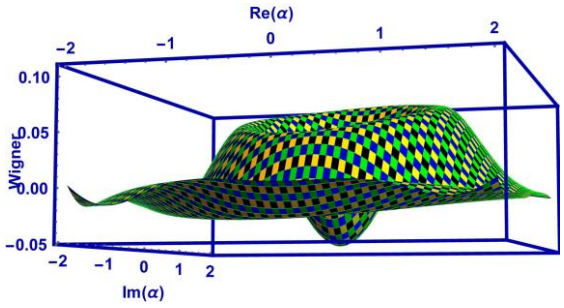
از جایگذاری رابطه (۹) در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$W(\alpha,\alpha^*) = \frac{2}{\pi(1+\bar{n})}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |\langle k,\alpha|n,\beta,f\rangle|^2 = \frac{2}{\pi(1+\bar{n})}exp\left(\frac{-|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \left|N_1N_1'C_{nk}(\alpha,\beta)+N_2N_2'D_{nk}(\alpha,\beta)\right|^2 \quad (۱۲)$$

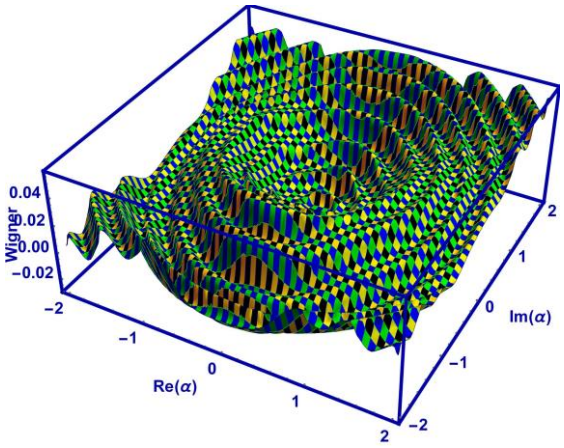
که در آن

$$C_{nk}(\alpha,\beta) = \sum_{m=0}^{\min[n,k]}\left[\frac{m!}{\sqrt{k!n!}}\frac{f(m)!}{f(n)!}(-\alpha)^{k-m}(-\beta^*)^{n-m} \times L_m^{k-m}\left(|\alpha|^2\right)L_m^{n-m}\left(|\beta|^2\right)\right], \quad (۱۳)$$

$$D_{nk}(\alpha,\beta) = \sum_{m=\min[n,k]+1}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{k!n!}}{m!}\frac{f(n)!}{f(m)!}(\alpha^*)^{m-k}(\beta)^{m-n} \times L_k^{m-k}\left(|\alpha|^2\right)L_n^{m-n}\left(|\beta|^2\right)\right]$$



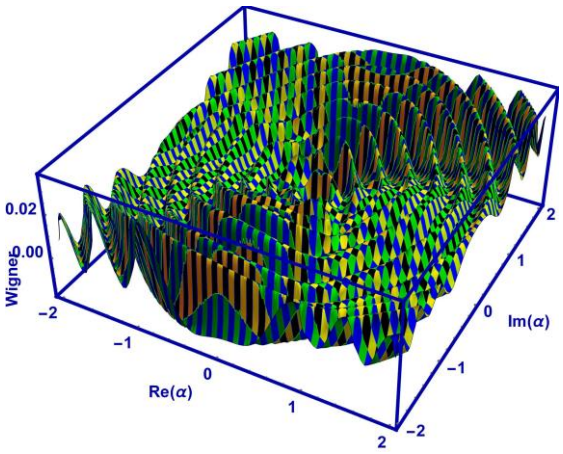
شکل۱: تابع توزیع ویگنر به‌ازای $\beta = 0.1+0.5i$ ، $f(n)=1$ و $\bar{n}=1$.



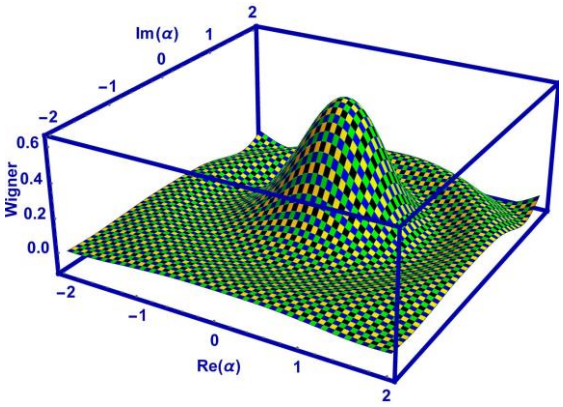
شکل۲: تابع توزیع ویگنر به‌ازا ی $\beta = 0.1+0.5i$ ، $f(n)=1$ و $\bar{n}=10$.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

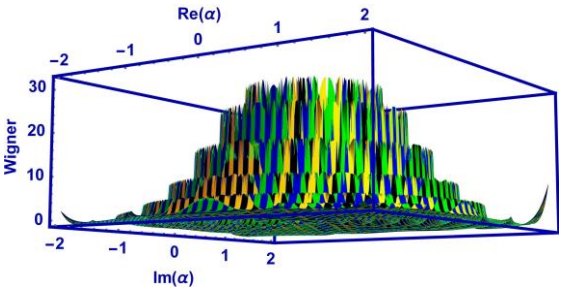
[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]



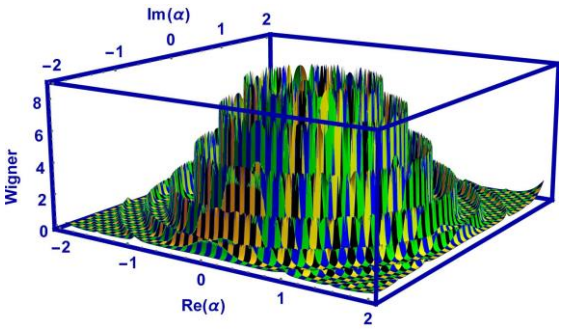
شکل۳: تابع توزیع ویگنر به‌ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$ ، $f(n) = 1$ و $\overline{n} = 50$.



شکل۴: تابع توزیع ویگنر به‌ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$ ، $f(n) = 1$ و $\overline{n} = 0$.



شکل۵: تابع توزیع ویگنر به‌ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$ ، $f(n) = \sqrt{n}$ و $\overline{n} = 1$.



شکل۶: تابع توزیع ویگنر به‌ازای $\beta = 0.1 + 0.5i$ ، $f(n) = \sqrt{n}$ و $\overline{n} = 50$.

نمودارهای ۱ تا ۶ تابع توزیع ویگنر حالت‌های همدوس گرمایی تغییرشکل‌یافته را به‌ازای مقادیر مختلف نشان می‌دهد. شکل ۱ نشان می‌دهد حالت همدوس گرمایی به‌ازای $\overline{n} = 1$ یک حالت غیرکلاسیکی است چرا که تابع ویگنر در بازه‌ای از فضای فاز منفی است. شکل‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند با افزایش تعداد فوتون‌های گرمایی رفتار غیرکلاسیکی ناپدید می‌گردد. در شکل ۴ تابع توزیع ویگنر در شرایطی رسم شده است که سامانه به حالت همدوس تقلیل می‌یابد و نتیجه به‌دست‌آمده با گزارش‌های پیشین در توافق است. شکل‌های ۵ و ۶ تابع ویگنر را برای حالت همدوس گرمایی غیرخطّی با تابع $f(n) = \sqrt{n}$ به نمایش می‌گذارند. مشاهده می‌شود که به‌ازای این تابع، تابع توزیع ویگنر در فضای فاز مثبت و رفتار کلاسیکی نمایان است. لازم به ذکر است که به‌منظور بررسی رفتارغیرکلاسیکی حالت‌های همدوس گرمایی تغییرشکل‌یافته، توابع غیرخطّی دیگری متناظر با سامانه‌های فیزیکی هم‌چون اتم‌های هیدروژن‌گونه، پتانسیل پوشل-تلر و حرکت مرکز جرم یون به‌دام‌افتاده در دست بررسی است.

۴- برداشت

در این مقاله با توجّه به اهمّیت اثرات حرارتی، یک ساختار کلی برای حالت همدوس گرمایی تغییرشکل‌یافته ارائه شد. برای نیل به این مهم از تعمیم روش برهم‌نهی گلاوبر-لاخس مربوط به حالت همدوس گرمایی استفاده گردید که نتیجه این امر تولید حالتی میانی بین حالت همدوس غیرخطّی و حالت گرمایی غیرخطّی است. هم‌چنین، تابع توزیع ویگنر به‌ازای مقادیر مختلف به بحث گذاشته شد.

بازیابه‌ها

[1] Gerry C.C. and Knight P.L. "*Introductory Quantum Optics",* Cambridge University Press, (2005).
[2] Lachs G., **Phys. Rev. B** 138 (1965) 1012.
[3] V. I. Man'ko V.I., Marmo G., Sudarshan E.C.G. and Zaccaria F., **Phys. Scr.** 55 (1997) 528.
[4] Ali S.T., Roknizadeh R. and Tavassoly M.K. **J. Phys. A: Math. Gen.** 37 (2004) 4407.
[5] Asili Firouzabadi N., Tavassoly M.K. and Faghihi M.J., **Chin. Phys. B** 24 (2015) 0642041.
[6] Ghorbani M., Faghihi M.J. and Safari H. **J. Opt. Soc. Am. B** 34 (2017) 1884.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]