# حالت‌های همدوس سامانه‌ی کوانتومی ابرانتگرال‌پذیر و دوبعدی فوکاس-لاگرستورم

مهدی اشرفی، علی مهدی‌فر و احسان عموقربان

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

چکیده - در این مقاله با بررسی یک سامانه‌ی ابرانتگرال پذیر کوانتومی دو بعدی، سامانه‌ی فوکاس-لاگرستروم، نشان خواهیم داد که می‌توان جبر این سامانه را به شکل یک جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته در نظر گرفت. سپس با استفاده از این جبر، حالت‌های همدوس سامانه‌ی مزبور را ساخته و برای آن رابطه‌ی تفکیک واحد را اثبات می‌کنیم. درنهایت، ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس ساخته شده شامل تعداد میانگین فوتون‌ها و پارامتر مندل را بررسی خواهیم نمود.

کلید واژه- پتانسیل نوسانگر دو بعدی فوکاس، جبر نوسانگر تغییر شکل یافته، حالت همدوس غیرخطی

# Coherent states of the two-dimensional quantum superintegrable Fokas-Lagerstrom system

Mahdi Ashrafi, Ali Mahdifar and Ehsan Amooghorban,

Physics group, Science Department, Shahrekord University, Shahrekord

Abstract- In this paper, by studying the two-dimensional quantum superintegrable Fokas-Lagerstrom system we show that it is possible to consider the algebra of this system as a deformed Weyl-Heisenberg algebra. Then we construct the coherent states of this system and prove their resolution of identity. We eventually investigate their quantum statistical properties, including the mean number of photons and the Mandel parameter.

Keywords: Two dimensional Fokas-Lagerstrom Potential, Deformed oscillator algebraic, Nonlinear coherent state

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

## ۱- مقدمه

شرودینگر در سال ۱۹۲۶ میلادی حالت‌های همدوس را ضمن مطالعه‌ی نوسانگر هماهنگ به‌عنوان حالت‌هایی با کمینه‌ی عدم قطعیت معرفی کرد. امروزه حالت‌های همدوس در بسیاری از شاخه‌های فیزیک کاربرد پیدا کرده‌اند[۴-۱]. ویژگی لازم برای یک حالت همدوس $|z\rangle$ نیز وجود رابطه تفکیک واحد است که به شکل زیر تعریف می‌شود[۵]

$$\int d^2z\,|z\rangle W(|z|^2)\langle z|=1. \qquad (۱)$$

تاکنون حالت‌های همدوس استاندارد به روش‌های مختلفی تعمیم داده شده‌اند[۶]. ازجمله این تعمیم‌ها، تعمیم جبری است که عمدتاً به آن دسته از تعمیم‌هایی اطلاق می‌گردد که در آن‌ها عملگرهای بوزونی استاندارد $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ با شکل عامی از این عملگرها $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ جایگزین می‌شوند. در حقیقت این عملگرها با ترکیبی از عملگرهای استاندارد و توابعی از برخی ثابت‌های حرکت سامانه ساخته می‌شوند. به عنوان نمونه می‌توان به جبر 12ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته اشاره کرد که در آن عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned}&\hat{A}=\hat{a}\,f\,(\hat{n})=f\,(\hat{n}+1)\,\hat{a},\\&\hat{A}^\dagger=f^{\,\dagger}(\hat{n})\,\hat{a}^\dagger=\hat{a}^\dagger f^{\,\dagger}(\hat{n}+1),\end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن $\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ عملگر عددی است و این عملگرها در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند،

$$\begin{aligned}&[\hat{A},\hat{n}]=\hat{A},\quad [\hat{A}^\dagger,\hat{n}]=-\hat{A}^\dagger,\\&[\hat{A},\hat{A}^\dagger]=\hat{n}\,f^{\,2}(\hat{n})-(\hat{n}+1)f^{\,2}(\hat{n}+1),\end{aligned} \qquad (۳)$$

از طرف دیگر، یکی از سامانه‌های مورد توجه در فیزیک سامانه‌های ابرانتگرال‌پذیر[۷] هستند. یک سامانه‌ی $D$ بعدی را ابرانتگرال‌پذیر گویند اگر دارای $2D-1$ ثابت حرکت مستقل باشد. بدین ترتیب، یک سامانه‌ای دو بعدی با هامیلتونی $\hat{H}$ انتگرال‌پذیر[۸] نامیده می‌شود اگر یک عملگر $\hat{I}$ در آن سامانه بتوان یافت که در رابطه‌ی $[H,I]=0$ صدق کند. حال اگر عملگر دیگری مانند $\hat{C}$ نیز وجود داشته باشد که با $\hat{H}$ جابجا شده اما با $\hat{I}$ جابجا نشود، سامانه ابرانتگرال پذیر نامیده می‌شود.

هدف ما در این مقاله ساخت حالت‌های همدوس یک سامانه ابرانتگرال پذیر دو بعدی کوانتومی، سامانه فوکاس-لاگرستروم (Fokas-Lagerstrom) است. بدین منظور نشان می‌دهیم جبر این سامانه را می‌توان به شکل یک جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته در نظر گرفت. سپس با استفاده از این جبر، حالت‌های همدوس سامانه مزبور را ساخته و برای آن رابطه تفکیک واحد را اثبات و در ادامه ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس را بررسی خواهیم کرد.

## ۲- حالت‌های همدوس سامانه ابرانتگرال پذیر فوکاس-لاگرستروم

هامیلتونی معرفی شده توسط فوکاس-لاگرستورم که به صورت زیر است[۹]،

$$H=\frac{1}{2}(P_x^2+P_y^2)+\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{18}, \qquad (۴)$$

مربوط به یک سامانه ابرانتگرال پذیر دو بعدی بوده و دو ثابت حرکت جابجا ناپذیر آن به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}&\hat{I}=P_x^2+X^2,\\&\hat{C}=\frac{1}{2}\{XP_y-YP_x,P_y^2\}+\frac{Y^3P_x}{27}-\frac{\{XY^2,P_y\}}{6},\end{aligned} \qquad (۵)$$

می‌توان نشان داد روابط جابجایی زیر،

$$[H,I]=0,\quad [H,C]=0,\quad [I,C]=R\neq 0, \qquad (۶)$$

ابرانتگرال پذیر بودن سامانه را نتیجه می‌دهند. با تعریف عملگرهای زیر:

$$\hat{n}=\frac{\hat{I}}{2}-u,\quad \hat{A}^\dagger=\hat{C}+\frac{\hat{R}}{2},\quad \hat{A}=\hat{C}-\frac{\hat{R}}{2}, \qquad (۷)$$

که در آن $u$ یک ثابت است.دیده می‌شود عملگرهای مزبور در جبر زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned}&[\hat{n},\hat{A}^\dagger]=\hat{A}^\dagger,\quad [\hat{n},\hat{A}^\dagger]=\hat{A}^\dagger,\\&[\hat{A},\hat{A}^\dagger]=\Phi(H,N+1)-\Phi(H,N),\end{aligned} \qquad (۸)$$

$\Phi(H,N)$ تابع ساختار نامیده می‌شود. وجود یک نمایش متناهی از جبر بالا، برای هر ویژه مقدار انرژی، موجب می‌شود که تابع ساختار در معادله‌های

$$\begin{aligned}&\Phi(E,N)=0,\\&\Phi(E,N+1),=0\\&\Phi(E,x)>0\,.\quad for\quad x=1,2,...,N\end{aligned} \qquad (۹)$$

صدق کند. ویژه مقدارهای انرژی ممکن، تبهگنی N+1 گانه دارند و با توجه به رابطه (۹)، مقدار $u$ برابر $1/2$



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]

می‌شود لذا سه تابع ساختار حاصل، برای این سامانه به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\Phi(E_N,x)=16x(N+1-x)(N+\frac{2}{3}-x)(N+\frac{4}{3}-x),$$
$$\Phi(E_N,x)=16x(N+1-x)(N+\frac{2}{3}-x)(N+\frac{1}{3}-x), \quad (۱۰)$$
$$\Phi(E_N,x)=16x(N+1-x)(N+\frac{5}{3}-x)(N+\frac{4}{3}-x).$$

از مقایسه جبر (۸) و جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته‌ی (۳) دیده می‌شود که می‌توان جبر سامانه فوکاس-لاگرستروم را، به ازای یک انرژی $E_N$ ثابت، به صورت یک جبر ویل-هایزنبرگ تغییرشکل‌یافته با تابع تغییر شکل

$$f(n)=\sqrt{(N-n+1)(N+A-n)(N+B-n)}, \quad (۱۱)$$

در نظر گرفت که در آن ثابت‌های $A$ و $B$ متناظر با یکی از زوج‌های $(2/3,4/3)$، $(2/3,1/3)$ یا $(5/3,4/3)$ هستند. با توجه به عملگر نابودی تغییر شکل یافته $\hat{A}=\hat{a}f(\hat{n})$ نیز داریم:

$$\hat{A}\,|N\rangle=0. \quad (۱۲)$$

بنابراین، برای این سامانه با یک فضای هیلبرت متناهی الابعاد روبه‌رو هستیم. از این‌رو، حالت‌های همدوس متناظر با سامانه فوکاس لاگرستروم را با استفاده از رهیافت حالت‌های همدوس با بعد متناهی به شکل زیر می‌سازیم[۶]:

$$|z\rangle=C(|z|^2)\exp(z\hat{A}^\dagger)|0\rangle$$
$$=C(|z|^2)\sum_{n=0}^{N}\frac{(4z)^n}{\sqrt{\frac{n\Gamma(n)\Gamma(N-n-1)}{N\Gamma(N)}}} \quad (۱۳)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\frac{\Gamma(A+N-n)}{\Gamma(A+N)}\times\frac{\Gamma(B+N-n)}{\Gamma(B+N)}}}|n\rangle,$$

که در آن $C(|z|^2)$ ضریب بهنجارش است. ویژگی لازم برای این‌که حالت $|z\rangle$ یک حالت همدوس باشد، وجود رابطه تفکیک واحد به شکل زیر است[۵]

$$\int d^2z\,|z\rangle W(|z|^2)\langle z|=1, \quad (۱۴)$$

که در آن $W(|z|^2)$ یک تابع وزن است که باید تعیین گردد. با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه بالا و درنظرگرفتن $z=re^{i\theta}$ ، $|z|^2=x$ و

$$\rho(n)=(\frac{1}{16})^n\frac{n\Gamma(n+1)\Gamma(N-n+1)}{N\Gamma(N)}\frac{\Gamma(N+A-n)}{\Gamma(N+A)} \quad (۱۵)$$
$$\times\frac{\Gamma(N+B-n)}{\Gamma(N+B)},$$

می‌توان نشان داد که وجود رابطه تفکیک واحد (۱۴) هم‌ارز با یافتن تابع $\tilde{w}(x)$ از انتگرال زیر خواهد بود:

$$\int_0^\infty x^n\tilde{w}(x)dx=\rho(n), \quad (۱۶)$$

که در آن داریم

$$\tilde{w}(x)=\pi[\frac{w(x)}{C(x)}], \quad (۱۷)$$

برای حل رابطه (۱۶) که موسوم به مسأله ممان است، از معکوس تبدیلات ملین استفاده می‌کنیم[۱۰] که با تعریف تابع میجر (Meijer's G-function) به شکل زیر [۱۱]

$$\int dx x^{k-1}G_{p,q}^{m,n}\left(\beta x\Big|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_m,b_{m+1},\ldots,b_q\end{matrix}\right)= \quad (۱۸)$$
$$\frac{1}{\beta^k}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+k)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-k)}{\prod_{j=m+1}^{q}},$$

و مقایسه رابطه‌های (۱۵) با (۱۸) تابع وزن $\tilde{w}(x)$ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{w}(x)=16\frac{1}{N\Gamma(N)\Gamma(A+N)\Gamma(B+N)}\times \quad (۱۹)$$
$$G_{0,0}^{1,3}\left(\frac{1}{16}x\Big|\begin{matrix}-N-1,\,-N-A,\,-N-B\\ 0\end{matrix}\right).$$

## ۳- ویژگی های غیرکلاسیکی حالت همدوس

در این بخش برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس متناظر با سامانه فوکاس لاگرستروم از جمله شمار میانگین فوتون‌ها و پارامتر مندل را بررسی می‌کنیم (بدلیل کمبود جا نمودارها فقط برای $A=2/3,B=4/3$ آورده شده‌اند). شمار میانگین فوتون‌ها در حالت همدوس مزبور برابر است با

$$\langle n\rangle=\langle z|a^\dagger a|z\rangle \quad (۲۰)$$

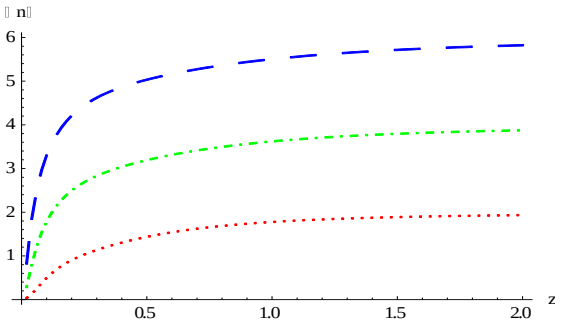
در شکل ۱ مقدار $\langle n\rangle$ برحسب $z$ به ازای مقادیر



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]

مختلف $N$ رسم شده است. همان‌گونه که از شکل مشخص است شمار میانگین فوتون‌های حالت‌های همدوس بدست آمده با افزایش $z$ و همچنین افزایش $N$ افزایش پیدا کرده است.

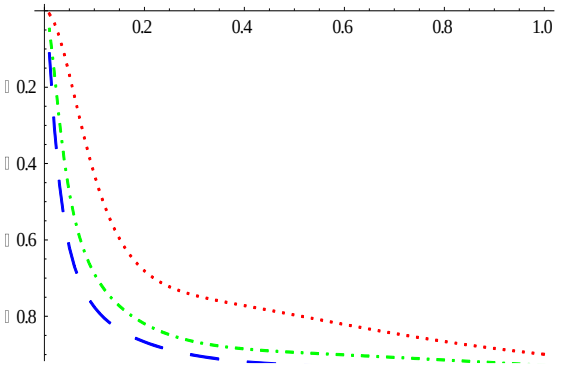



شکل ۱: شمار میانگین فوتون‌های حالت‌های همدوس برحسب $z$ به ازای $N=2$ (نقطه چین) و $N=4$ (خط نقطه چین) و $N=6$ (خط چین).

به منظور بررسی انحراف تابع توزیع احتمال حالت‌های همدوس از شکل پواسونی، پارامتر مندل وابسته به حالت‌های همدوس محاسبه شده را از رابطه

$$M=\frac{(\Delta\hat{n})^2-\langle\hat{n}\rangle}{\langle\hat{n}\rangle}, \qquad (۲۱)$$

محاسبه کرده و نتایج را در شکل ۲ نشان داده‌ایم.




شکل ۲ نمودار پارامتر مندل برحسب $z$ به ازای $N=2$ (نقطه چین) و $N=4$ (خط نقطه چین) و $N=6$ (خط چین).

همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش $z$، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود. همچنین افزایش $N$ سبب می‌شود که پارامتر مندل حالت‌های همدوس بدست آمده سریع‌تر به سمت $-1$ میل کند.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با بررسی سامانه ابرانتگرال‌پذیر کوانتومی دو بعدی، سامانه فوکاس-لاگرستروم، نشان دادیم که می‌توان جبر این سامانه را به شکل یک جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته در نظر گرفت. سپس با استفاده از این جبر حالت‌های همدوس سامانه مزبور را ساخته و برای آن رابطه تفکیک واحد را اثبات کردیم. همچنین ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس ساخته شده را بررسی کردیم.

## سپاسگزاری

نویسندگان از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد برای حمایت‌های انجام شده قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. **10**, 84, (1963); Phys. Rev. **130**, 2529 (1963); Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[2] A. P. Perelomov, Generalized Coherent States and Their Applications (Springer, Berlin, 1986)

[3] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics* (World Scientific, Singapore, 1985)

[4] S. T. Ali, J-P Antoine and J-P Gazeau, *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations* (Springer, New York, 2000)

[۶]. علی مهدی‌فر، "ساختار هندسی همدوس غیرخطی"، پایان نامه دکتری، دانشگاه اصفهان، ۱۳۸۶.

*Hietarinta, Phys. Rep. **147**, 87 .[7] J (1987).*

*[8] S. Weigert, Physica D, **56,** 107 (1992).*

[9] D. Bonatsos, C. Dasksloyannis and K. Kokkotas, Phys. Rev. A. **50**, 3700 (1994).

*[10] M K Tavasoly and H R Jalali, Chin. Phys. B, **22** (2013)*



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31 ]