درهم‌تنیدگی برهم‌نهی‌های مختلف حالت‌های همدوس فوتون_افزوده

حمیدرضا کشاورز و غلامرضا هنرآسا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده – در این مقاله درهم‌تنیدگی برهم‌نهی‌های مختلف حالت‌های همدوس فوتون_افزوده با استفاده از معیار توافق (تلاقی) بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش اختلاف بین فوتون‌های افزوده شده در دو مد، درهم تنیدگی بیشتر می‌شود و بیشینه درهم‌تنیدگی در برهم نهی‌های منفی رخ می‌دهد.

کلید واژه- حالت‌های همدوس فوتون افزوده، در هم‌تنیدگی، برهم‌نهی، توافق(تلاقی).

Entanglement of Different Superpositions of Photon–Added Coherent States

Hamidreza Keshavarz and Gholamreza Honarasa

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Abstract- In this paper, the entanglement of different superpositions of photon added coherent states is investigated using concurrence criterion. The results show that as the difference between photons added in the two modes increases, the entanglement increases and the maximum entanglement occurs in negative superpositions.

Keywords: Photon added coherent states, Entanglement, Superposition, Concurrence.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

۱ - مقدمه

حالت‌های همدوس ابتدا توسط شرودینگر در زمینه‌ی نوسانگرهای هماهنگ معرفی شدند [۱]. حالت‌های همدوس فوتون_افزوده که حالتی بین حالت‌های همدوس (شبیه ترین حالت کوانتومی به کلاسیک) و حالت‌های عددی (حالت کوانتومی خالص) بشمار می روند، حالت فوتون_افزوده است که با به‌کارگیری مکرر عملگر خلق روی پایه‌های حالت همدوس به‌دست می‌آیند. این حالت‌ها نخستین بار توسط آگروال و تارا معرفی شدند[۲]. حالتهای همدوس فوتون_افزوده بسیار مورد توجه هستند زیرا دارای آمار زیرپواسونی و تابع ویگنر منفی هستند و این ویژگی‌ها آنها را در دسته حالت‌های غیرکلاسیکی قرار می دهد که برای کاربردهای اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب هستند[۳].

درهم تنیدگی یکی از مهم ترین ویژگی کوانتومی است و از آن را به عنوان یک منبع مهم و ارزشمند برای انجام رایانش و مبادله اطلاعات کوانتومی استفاده می کنند [۴]. در این مقاله درهم تنیدگی برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون_افزوده را برای تعداد فوتون های افزوده مختلف و برهم نهی های مثبت و منفی بررسی خواهیم کرد.

۲- حالت‌های همدوس فوتون افزوده

حالت‌های همدوس فوتون_افزوده به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$|\pm\alpha,m\rangle=\frac{\hat{a}^{\dagger m}|\pm\alpha\rangle}{m!\left[L_m\left(-|\alpha|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (۱)$$

که در آن $|\pm\alpha\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm\alpha)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ حالت همدوس است و $L_m(x)$ چند جمله‌ای لاگر از مرتبه m است. $\hat{a}^{\dagger m}$ عملگر خلق است که m مرتبه مورد استفاده قرار گرفته است. هم پوشانی بین دو حالت بهنجار نشده همدوس با mو n فوتون افزوده ($\hat{a}^{\dagger m}|-\alpha\rangle$ و $\hat{a}^{\dagger n}|-\beta\rangle$) به صورت زیر به دست آید:

(۲)

$$\begin{aligned}\langle-\alpha|\hat{a}^m\hat{a}^{\dagger n}|-\beta\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}}\\ &\times\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^{*i}(-\beta)^j}{\sqrt{i!}\sqrt{j!}}\langle i|a^m a^{\dagger n}|j\rangle\\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}}\\ &\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha^*\beta\right)^i(-1)^{m-n}\beta^{m-n}(m+1)!}{i!(i+m-n)!}\end{aligned}$$

۳- درهم‌تنیدگی

در این بخش به بررسی برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون_افزوده به عنوان حالت‌های دو قسمتی به صورت زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}|\Psi^{AB}\rangle &= N(u\,a^{\dagger m}|-\alpha\rangle_A b^{\dagger n}|-\beta\rangle_B\\ &+v\,a^{\dagger n}|-\beta\rangle_A b^{\dagger m}|-\alpha\rangle_B)\end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن $a^{\dagger m}$ ($b^{\dagger n}$) می‌تواند m (یا n) فوتون در مد $\hat{a}$ زیر سیستم A ($\hat{b}$ در زیر سیستم B) تولید کند. u و v اعداد مختلطی هستند که معرف برهم نهی حالت‌ها هستند و از $|u|^2+|v|^2=1$ پیروی می‌کنند. N ضریب بهنجارش است و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

(۴)

$$\begin{aligned}N(u,v)=&\left[L_m\left(-|\alpha|^2\right)L_n\left(-|\beta|^2\right)m!n!\right.\\ &\left.+2e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)}\mathrm{Re}\left(u^*v\right)\left|\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha^*\beta\right)^i(-1)^{m-n}\beta^{m-n}(m+i)!}{i!(i+m-n)!}\right|^2\right]^{\frac{-1}{2}}\end{aligned}$$

می‌توان دو کیوبیت به صورت زیر برای هر زیربخش تعریف کرد [۳]:

$$\begin{aligned}|0\rangle &\equiv N_1 a^{\dagger m}|-\alpha\rangle\\ |1\rangle &\equiv N_2\left(a^{\dagger n}|-\beta\rangle - Z\,N_1 a^{\dagger m}|-\alpha\rangle\right)\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن $Z=N_1{}^*\langle-\alpha|a^m a^{\dagger n}|-\beta\rangle$ از هم پوشانی بین دو حالت غیر متعامد با ضرایب بهنجارش زیر به دست می آید:

$$N_1=\left[L_m\left(-|\alpha|^2\right)m!\right]^{-1/2} \qquad (۶)$$

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

(۷)
$$N_2=\left[L_n\left(-|\beta|^2\right)n!+|ZN_1|^2L_m\left(-|\alpha|^2\right)m!-2e^{\frac{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)}{2}}\times\mathrm{Re}\left(ZN_1\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\beta^*\alpha\right)^i(-\beta)^{*(m-n)}(m+i)!}{i!(i+m-n)!}\right)\right]^{-1/2}$$

حالت (۳) را می‌توان بر حسب دو کیوبیت معرفی شده به صورت زیر نوشت:

$$\left|\psi^{AB}\right\rangle=\frac{N(u,v)}{N_1N_2}(u|01\rangle+v|10\rangle+ZN_2(u+v)|00\rangle) \quad (۸)$$

برای تعیین درجه در هم تنیدگی از معیار توافق یا تلاقی استفاده می‌کنیم [۵]. این معیار مقادیر بین صفر تا یک به خود می گیرد به نحوی که صفر نشان دهنده عدم وجود درهم تنیدگی و یک نشان دهنده درهم تنیدگی کامل است. این معیار برای حالت (۸) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C=\left|\left\langle\psi^{AB}\left|\sigma_y\otimes\sigma_y\right|\psi^{AB}*\right\rangle\right| \quad (۹)$$

که در آن σ_y ماتریس y پائولی است. در نهایت معیار توافق یا تلاقی برای برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون افزوده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C=2\left(\frac{N(u,v)}{N_1N_2}\right)^2|uv| \quad (۱۰)$$

۴- نتایج و بحث

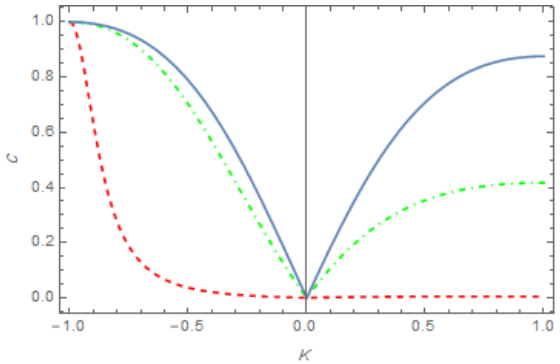
در این قسمت به بررسی میزان در هم تنیدگی برهم‌نهی حالت‌های همدوس فوتون_افزوده برای نسبت های مختلف برهم‌نهی به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف می‌پردازیم.

به این منظور نسبت برهم نهی u و v را برحسب ضریب k بیان می کنیم $k = u/v$ که k های منفی بیانگر برهم نهی منفی و k های مثبت، برهم نهی مثبت را بیان می‌کند.

در شکل ۱، تلاقی بر حسب k با در نظر گرفتن $\alpha=\beta=10$ به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف رسم شده است. در این شکل نمودار خط‌چین به ازای $n=2$ و $m=3$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌کنیم در $k=-1$ معیار توافق ۱ است که به معنای درهم‌تنیدگی کامل است اما ضریب C به مرور در امتداد k به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در این حالت به ازای برهم‌نهی‌های منفی درهم‌تنیدگی از حالت بیشینه به سمت صفر میل می‌کند و در برهم‌نهی مثبت نیز درهم‌تنیدگی رخ نمی‌دهد.

نمودار خط-نقطه برای $n=2$ و $m=12$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم تنیدگی به ازای $k=-1$ رخ داده است و با شیب ملایم تری به نسبت نمودار قبلی به سمت صفر میل می‌کند. در $k=0$ درهم‌تنیدگی به صفر میل می کند، اما برای برهم‌نهی مثبت، درهم‌تنیدگی با افزایش k افزایش می‌یابد که مقدار بیشینه آن در $k=1$ رخ می‌دهد و مقدار آن $C=0.4$ است.

نمودار خط توپر برای $n=2$ و $m=20$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه درهم‌تنیدگی در $k=-1$ رخ داده است و همانند دو نمودار قبل در $k=0$ درهم‌تنیدگی صفر می‌شود اما در برهم‌نهی منفی با شیب کمتری نسبت به دو نمودار قبل به سمت صفر میل می‌کند. برای برهم‌نهی مثبت هم افزایش درهم‌تنیدگی داریم و بیشینه درهم‌تنیدگی در $k=1$ رخ می‌دهد که مقدار آن $C=0.87$ است. بنابراین با افزایش تعداد فوتون‌های افزوده شده، درهم‌تنیدگی افزایش یافته است.



شکل ۱: ضریب توافق برحسب تابعی از k، به ازای $n=2$ و $m=3$ (منحنی خط‌چین)، $m=12$ (منحنی خط-نقطه) و $m=20$ (منحنی توپر).

در شکل ۲ نیز تلاقی بر حسب k با در نظرگرفتن $\alpha=\beta=10$ به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف رسم شده است.

در این شکل نمودار خط چین به ازای $n=10$ و $m=3$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در $k=-1$ ضریب توافق ما ۱ است که به معنای درهم‌تنیدگی کامل

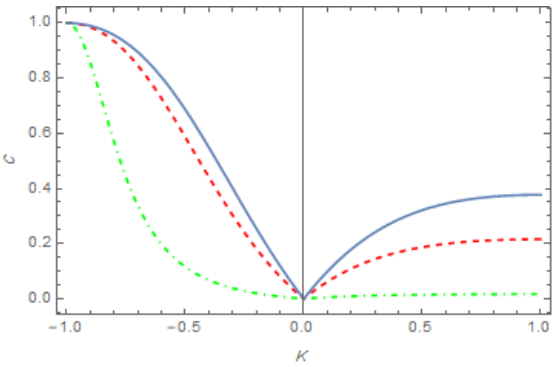
این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

است اما ضریب C به مرور در امتداد k به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در این حالت به ازای برهم‌نهی‌های منفی درهم‌تنیدگی از حالت بیشینه به سمت صفر میل می‌کند. در برهم نهی مثبت ضریبC از صفر تا $C=0.2$ افزایش می‌یابد که بیشینه آن در $k=1$است.

نمودار نقطه خط-نقطه برای $n=10$ و $m=12$رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم تنیدگی به ازای $k=-1$رخ داده است و با شیب تند تری نسبت به نمودار قبلی به سمت صفر میل می‌کند. در برهم‌نهی‌های مثبت تقریبا درهم‌تنیدگی صفر است.

نمودار خط توپر برای $n=10$ و $m=20$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه درهم‌تنیدگی در $k=-1$ رخ داده است و همانند دو نمودار قبل در $k=0$ درهم‌تنیدگی صفر می شود اما در برهم‌نهی منفی ضریبC با شیب کمتری نسبت به دو نمودار قبل به سمت صفر میل می‌کند. برای برهم‌نهی مثبت هم افزایش درهم‌تنیدگی داریم و بیشینه ضریبC در $k=1$رخ می‌دهد که مقدار آن $C=0.4$است.



شکل ۲: ضریب توافق برحسب تابعی از k، به ازای $n=10$ و $m=3$ (منحنی خط‌چین)، $m=12$(منحنی خط-نقطه) و $m=20$(منحنی توپر).

۵- نتیجه‌گیری

ضریب توافق یا تلاقی به ازای $k=-1$ بیشینه است. بنابراین بیشترین درهم‌تنیدگی هنگامی رخ می‌دهد که برهم‌نهی منفی ($u=-v$) باشد. در حالت کلی همانطور که از شکل‌ها مشخص است به ازای $|k|$ یکسان، همواره میزان درهم‌تنیدگی در برهم‌نهی منفی، بیشتر از میزان درهم‌تنیدگی در برهم‌نهی مثبت است.

برای سایر حالت‌ها نیز درهم‌تنیدگی به تعداد فوتون‌های افزوده شده بستگی دارد و میزان درهم تنیدگی برهم‌نهی حالت‌های همدوس فوتون افزوده برای برهم‌نهی‌های مثبت و منفی به $|m-n|$بستگی دارد و هر چه این مقدار بزرگتر باشد میزان درهم‌تنیدگی حالت‌ها بیشتر است.

مراجع

[1] E. Schrödinger, “Der stetige Übergang von der Mikrozur Makromechanik”, Naturwissenschaften, Vol. 14, pp. 664-666, 1926 .

[2] G. S. Agarwal, K. Tara, “Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state”, Phys. Rev. A, Vol. 43, pp. 492-497, 1991.

[3] F. A. Domínguez-Serna, F. J. Mendieta-Jimenez, F. Rojas, “Entangled photon-added coherent states”, Quant. Inf. Proc., Vol. 15, pp. 3121-3136, 2016.

[4] R. Jozsa, N. Linden, “On the role of entanglement in quantum-computational speed-up”, Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., Vol. 459, pp. 2011–2032, 2003.

[5] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”, Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 2245–2248, 1998.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]