

درهم تنیدگی بر هم نهی های مختلف حالت های همدوس فoton_افزوده

حمیدرضا کشاورز و غلامرضا هنرآسا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده- در این مقاله درهم تنیدگی بر هم نهی های مختلف حالت های همدوس فoton_افزوده با استفاده از معیار توافق (تلاقي) بررسی شده است. نتایج نشان می دهد با افزایش اختلاف بین فوتون های افزوده شده در دو مدل، درهم تنیدگی بیشتر می شود و بیشینه درهم تنیدگی در بر هم نهی های منفی رخ می دهد.

کلید واژه- حالت های همدوس فoton_افزوده، درهم تنیدگی، بر هم نهی، توافق(تلاقي).

Entanglement of Different Superpositions of Photon-Added Coherent States

Hamidreza Keshavarz and Gholamreza Honarasa

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Abstract- In this paper, the entanglement of different superpositions of photon added coherent states is investigated using concurrence criterion. The results show that as the difference between photons added in the two modes increases, the entanglement increases and the maximum entanglement occurs in negative superpositions.

Keywords: Photon added coherent states, Entanglement, Superposition, Concurrence.

۱- مقدمه

$$\begin{aligned} \langle -\alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{+n} | -\beta \rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \\ &\times \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^{*i} (-\beta)^j}{\sqrt{i!} \sqrt{j!}} \langle i | \hat{a}^m \hat{a}^{+n} | j \rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^i (-1)^{m-n} \beta^{m-n} (m+1)!}{i! (i+m-n)!} \end{aligned} \quad (2)$$

۳- درهم تئیدگی

در این بخش به بررسی برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون_افزوده به عنوان حالت‌های دو قسمتی به صورت زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} |\Psi^{AB}\rangle &= N(u a^{\dagger m} |-\alpha\rangle_A b^{\dagger n} |-\beta\rangle_B \\ &\quad + v a^{\dagger n} |-\beta\rangle_A b^{\dagger m} |-\alpha\rangle_B) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $a^{\dagger m}$ ($b^{\dagger n}$) می‌تواند $(n)m$ فوتون در مد \hat{a} زیر سیستم A (B) در زیر سیستم (B) تولید کند. u و v اعداد مختلفی هستند که معرف برهم نهی حالت‌ها هستند و از $|u|^2 + |v|^2 = 1$ پیروی می‌کنند. N ضریب بهنجارش است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N(u,v) &= [L_m(-|\alpha|^2)L_n(-|\beta|^2)m!n!] \\ &\quad + 2e^{-|\alpha|^2 + |\beta|^2} \operatorname{Re}[\bar{u}^* v] \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^i (-1)^{m-n} \beta^{m-n} (m+i)!}{i!(i+m-n)!} \right|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

می‌توان دو کیویت به صورت زیر برای هر زیربخش تعريف کرد [۳]:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv N_1 a^{\dagger m} |-\alpha\rangle \\ |1\rangle &\equiv N_2 \left(a^{\dagger n} |-\beta\rangle - Z N_1 a^{\dagger m} |-\alpha\rangle \right) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $Z = N_1 * \langle -\alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{+n} | -\beta \rangle$ از هم پوشانی بین دو حالت غیر متعامد با ضرایب بهنجارش زیر به دست می‌آید:

$$N_1 = \left[L_m(-|\alpha|^2)m! \right]^{1/2} \quad (6)$$

حالات‌های همدوس ابتدا توسط شرودینگر در زمینه نوسانگرهای هماهنگ معرفی شدند [۱]. حالات‌های همدوس فوتون_افزوده که حالتی بین حالت‌های همدوس (شیوه ترین حالت کوانتومی به کلاسیک) و حالت‌های عددی (حالت کوانتومی خالص) بشمار می‌روند، حالت فوتون_افزوده است که با به کارگیری مکرر عملگر خلق روی پایه‌های حالت همدوس به دست می‌آیند. این حالت‌ها نخستین بار توسط آگرووال و تارا معرفی شدند [۲]. حالت‌های همدوس فوتون_افزوده بسیار مورد توجه هستند زیرا دارای آمار زیرپواسونی و تابع ویگنر منفی هستند و این ویژگی‌ها آنها را در دسته حالت‌های غیرکلاسیکی قرار می‌دهد که برای کاربردهای اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب هستند [۳].

درهم تئیدگی یکی از مهم ترین ویژگی کوانتومی است و از آن را به عنوان یک منبع مهم و ارزشمند برای انجام رایانش و مبادله اطلاعات کوانتومی استفاده می‌کنند [۴]. در این مقاله درهم تئیدگی برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون_افزوده را برای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف و برهم نهی‌های مثبت و منفی بررسی خواهیم کرد.

۲- حالت‌های همدوس فوتون افزوده

حالات‌های همدوس فوتون_افزوده به صورت زیر تعريف می‌شوند:

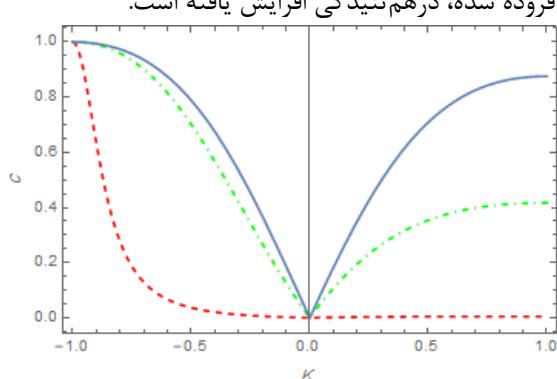
$$|\pm \alpha, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m} |\pm \alpha\rangle}{m! \left[L_m(-|\alpha|^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

که در آن $|\pm \alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm \alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ حالت همدوس است و $L_m(x)$ چند جمله‌ای لاغر از مرتبه m است. $\hat{a}^{\dagger m}$ عملگر خلق است که m مرتبه مورد استفاده قرار گرفته است. هم پوشانی بین دو حالت بهنجار نشده همدوس با n فوتون افزوده ($\hat{a}^{\dagger n} |-\beta\rangle$ و $\hat{a}^{\dagger m} |-\alpha\rangle$) به صورت زیر به دست آید:

به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در این حالت به ازای برهمنهی‌های منفی در هم‌تنیدگی از حالت بیشینه به سمت صفر میل می‌کند و در برهمنهی مثبت نیز در هم‌تنیدگی رخ نمی‌دهد.

نمودار خط- نقطه برای $n = 2$ و $m = 12$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم‌تنیدگی به ازای $k = -1$ رخ داده است و با شیب ملایم تری به نسبت نمودار قبلی به سمت صفر میل می‌کند. در $k = 0$ در هم‌تنیدگی به صفر میل می‌کند، اما برای برهمنهی مثبت، در هم‌تنیدگی با افزایش k افزایش می‌یابد که مقدار بیشینه آن در $k = 1$ رخ می‌دهد و مقدار آن $C = 0.4$ است.

نمودار خط توپر برای $n = 20$ و $m = 20$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم‌تنیدگی در $k = -1$ رخ داده است و همانند دو نمودار قبل در $k = 0$ در هم‌تنیدگی صفر می‌شود اما در برهمنهی منفی با شیب کمتری نسبت به دو نمودار قبل به سمت صفر میل می‌کند. برای برهمنهی مثبت هم افزایش در هم‌تنیدگی داریم و بیشینه در هم‌تنیدگی در $k = 1$ رخ می‌دهد که مقدار آن $C = 0.87$ است. بنابراین با افزایش تعداد فوتون‌های افزوده شده، در هم‌تنیدگی افزایش یافته است.



شکل ۱: ضریب توافق برحسب تابعی از k به ازای $n = 2$ و $m = 3$ (منحنی خط‌چین)، $n = 12$ و $m = 20$ (منحنی خط- نقطه) و توپر.

در شکل ۲ نیز تلاقی بر حسب k با در نظر گرفتن $\alpha = \beta = 10$ به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف رسم شده است.

در این شکل نمودار خط‌چین به ازای $n = 10$ و $m = 3$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در $k = -1$ ضریب توافق ما ۱ است که به معنای در هم‌تنیدگی کامل

$$N_2 = [L_n(-|\beta|^2)n! + |ZN_1|^2 L_m(-|\alpha|^2)m! - 2e^{-\frac{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}}]^{-1/2} \times \text{Re} \left[ZN_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\beta^* \alpha)^i (-\beta)^{*(m-n)} (m+i)!}{i!(i+m-n)!} \right] \quad (7)$$

حالت (۳) را می‌توان بر حسب دو کیوبیت معرفی شده به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} |\psi^{AB}\rangle &= \frac{N(u,v)}{N_1 N_2} (u|01\rangle + v|10\rangle \\ &\quad + ZN_2(u+v)|00\rangle) \end{aligned} \quad (8)$$

برای تعیین درجه در هم‌تنیدگی از معیار تواافق یا تلاقی استفاده می‌کنیم [۵]. این معیار مقادیر بین صفر تا یک به خود می‌گیرد به نحوی که صفر نشان دهنده عدم وجود در هم‌تنیدگی و یک نشان دهنده در هم‌تنیدگی کامل است. این معیار برای حالت (۸) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C = \left| \langle \psi^{AB} | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi^{AB} \rangle \right| \quad (9)$$

که در آن σ_y ماتریس y پائولی است. در نهایت معیار تواافق یا تلاقی برای برهمنهی همدوش فوتون افزوده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = 2 \left(\frac{N(u,v)}{N_1 N_2} \right)^2 |uv| \quad (10)$$

۴- نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی میزان در هم‌تنیدگی برهمنهی حالت‌های همدوش فوتون افزوده برای نسبت‌های مختلف برهمنهی به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف می‌پردازیم.

به این منظور نسبت برهمنهی u و v را برحسب ضریب $k = u/v$ که k های منفی بیانگر برهمنهی منفی و k های مثبت، برهمنهی مثبت را بیان می‌کند.

در شکل ۱، تلاقی بر حسب k با در نظر گرفتن $\alpha = \beta = 10$ به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف رسم شده است. در این شکل نمودار خط‌چین به ازای $n = 2$ و $m = 3$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در $k = -1$ معیار تواافق ۱ است که به معنای در هم‌تنیدگی کامل است اما ضریب C به مرور در امتداد k

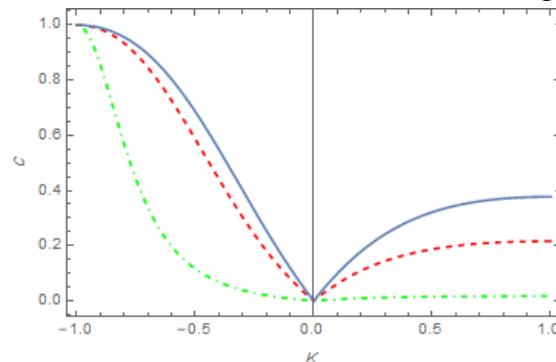
حالتهای همدوس فوتون افزوده برای برهمنهی‌های مثبت و منفی به $|m-n|$ بستگی دارد و هر چه این مقدار بزرگتر باشد میزان درهم‌تنیدگی حالت‌ها بیشتر است.

مراجع

- [1] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikrozur Makromechanik", Naturwissenschaften, Vol. 14, pp. 664-666, 1926 .
- [2] G. S. Agarwal, K. Tara, "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state", Phys. Rev. A, Vol. 43, pp. 492-497, 1991.
- [3] F. A. Domínguez-Serna, F. J. Mendieta-Jimenez, F. Rojas, "Entangled photon-added coherent states", Quant. Inf. Proc., Vol. 15, pp. 3121-3136, 2016.
- [4] R. Jozsa, N. Linden, "On the role of entanglement in quantum-computational speed-up", Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., Vol. 459, pp. 2011-2032, 2003.
- [5] W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits", Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 2245-2248, 1998.

است اما ضریب C به مرور در امتداد k به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در این حالت به ازای برهمنهی‌های منفی درهم‌تنیدگی از حالت بیشینه به سمت صفر میل می‌کند. در بره نهی مثبت ضریب C از صفر تا $C = 0.2$ افزایش می‌یابد که بیشینه آن در $k = 1$ است.

نمودار نقطه خط-نقطه برای $m = 12$ و $n = 10$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم تنیدگی به ازای $k = -1$ رخ داده است و با شبیه تند تری نسبت به نمودار قبلی به سمت صفر میل می‌کند. در برهمنهی‌های مثبت تقریباً درهم‌تنیدگی صفر است. نمودار خط توپر برای $m = 20$ و $n = 10$ رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه درهم‌تنیدگی در $k = 0$ رخ داده است و همانند دو نمودار قبل در هم تنیدگی صفر می شود اما در برهمنهی منفی ضریب C با شبیه کمتری نسبت به دو نمودار قبل به سمت صفر میل می‌کند. برای برهمنهی مثبت هم افزایش درهم‌تنیدگی داریم و بیشینه ضریب C در $k = 1$ رخ می‌دهد که مقدار آن $C = 0.4$ است.



شکل ۲: ضریب توافق بر حسب تابعی از k ، به ازای $m = 3$ و $n = 10$ (منحنی خط‌چین)، $m = 12$ (منحنی خط-نقطه) و $m = 20$ (منحنی توپر).

۵- نتیجه‌گیری

ضریب توافق یا تلاقی به ازای $k = -1$ بیشینه است. بنابراین بیشترین درهم‌تنیدگی هنگامی رخ می‌دهد که برهمنهی منفی ($u = -v$) باشد. در حالت کلی همانطور که از شکل‌ها مشخص است به ازای $|k|$ یکسان، همواره میزان درهم‌تنیدگی در برهمنهی منفی، بیشتر از میزان درهم‌تنیدگی در برهمنهی مثبت است.

برای سایر حالتهای نیز درهم‌تنیدگی به تعداد فوتون‌های افزوده شده بستگی دارد و میزان درهم‌تنیدگی برهمنهی