تلاقی یک سامانه دوکیوبیتی در حضور یک میدان کلاسیکی در یک محیط مشترک

ساره گل‌کار، محمد کاظم توسلی

گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

چکیده - در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی یک سامانه کوانتومی متشکل از دو کیوبیت در برهم‌کنش با یک میدان کوانتیده و هم‌چنین یک میدان کلاسیکی اعمالی را در یک محیط مشترک در دمای صفر بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که در رژیم جفت‌شدگی قوی، با اعمال میدان کلاسیکی میزان درهم‌تنیدگی سامانه در حضور نامیزانی و با کنترل بسامد رابی افزایش می‌یابد. هم‌چنین، ملاحظه خواهیم کرد که حفظ درهم‌تنیدگی در رژیم جفت‌شدگی قوی نسبت به رژیم جفت‌شدگی ضعیف در حضور میدان کلاسیکی به طور چشم‌گیری بیشتر است.

کلید واژه- درهم‌تنیدگی، بسامد رابی، رژیم جفت‌شدگی قوی و ضعیف، تلاقی.

Concurrence of a two-qubit system in the presence of a driven classical field in a common reservoir

S. Golkar, M. K. Tavassoly

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper, we consider the dynamics of two-qubit entanglement where each qubit interacts with a quantized as well as a classical driving field that is coupled with a common reservoir at zero temperature. In the strong coupling regime, by applying the classical driving field the amount of entanglement of the system can be increased in the off-resonance condition and by controlling the classical field (the Rabi frequency). Also, the results show that entanglement preservation in the strong coupling regime is more visible than in the weak coupling regime.

Keywords: Entanglement, Rabi frequency, Strong and weak coupling regimes, Concurrence.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی کوانتومی نقش مهمی در نظریه اطلاعات کوانتومی و ارتباطات کوانتومی [۱] ایفا می‌کند، اما متاسفانه به علت برهم‌کنش گریزناپذیر بین یک سامانه کوانتومی واقعی و محیط اطراف آن میزان درهم‌تنیدگی در برخی موارد کاهش می‌یابد [۲]. در این سامانه‌ها نگهداری درهم‌تنیدگی کوانتومی برای مدت زمان طولانی در سامانه‌های فیزیکی یک مسأله مهم در کاربردهای نظریه اطلاعات کوانتومی است. دینامیک سامانه‌های کوانتومی باز به نوع محیطی که با سامانه برهم‌کنش می‌کند بستگی دارد. در رژیم مارکوفی (رژیم جفت‌شدگی ضعیف) رفتار درهم‌تنیدگی الزاماً یک رفتار نمایی است و درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت با گذشت زمان کاهش می‌یابد [۳]، در حالی‌که در رژیم غیرمارکوفی (رژیم جفت‌شدگی قوی) به خاطر حافظه طولانی مدت محیط، احیاء درهم‌تنیدگی منجر به حفظ درهم‌تنیدگی می‌شود [۴]. اخیراً طرح‌واره‌های متعددی به منظور حفظ درهم‌تنیدگی معرفی شده است [۶، ۵]. در این مقاله با در نظر گرفتن یک سامانه دوکیوبیتی در یک محیط مشترک در دمای صفر با اعمال میدان کلاسیکی به بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی در دو رژیم گفته شده و حفظ درهم‌تنیدگی در آنها می‌پردازیم.

۲- مدل و معادلات اساسی

در این بخش دو کیوبیت درون یک منبع مشترک را در نظر می‌گیریم که تحت اعمال میدان کلاسیکی با بسامد ω_L قرار گرفته‌اند. با فرض اینکه از برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بین دو کیوبیت صرف‌نظر شود، هامیلتونی کلی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود [۷]:

$$H=\frac{\omega_0}{2}(\sigma_z^A+\sigma_z^B)+\sum_k\omega_k a_k^\dagger a_k+\Omega e^{-i\omega_L t}(\sigma_+^A+\sigma_+^B) \quad (۱)$$
$$+\Omega e^{i\omega_L t}(\sigma_-^A+\sigma_-^B)+\sum_k g_k a_k(\alpha_1\sigma_+^A+\alpha_2\sigma_+^B)+\text{H.C.}$$

در رابطه بالا، Ω بسامد رابی، ω_0 بسامد کیوبیت و $\sigma_z,\sigma_+,\sigma_-$ به ترتیب عملگرهای وارونی، بالابر و پایین‌بر اتمی. a_k و $a_k^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش مد kام میدان با بسامد ω_k و g_k ثابت جفت‌شدگی بین کیوبیت و مد kام میدان است. از آنجا که دو کیوبیت A و B در مکان‌های متفاوتی نسبت به مرکز کاواک هستند هر یک از آن‌ها مقادیر مختلفی از میدان کاواک را تجربه می‌کنند لذا کمیت حقیقی بدون بعد α_j، $j=1,2$ که وابسته به مکان نسبی کیوبیت درون کاواک است را معرفی می‌کنیم. از آنجا که تبدیل یکانی، ویژه‌مقادیر سامانه را تغییر نمی‌دهد در چارچوب مرجع چرخان با تبدیل یکانی $U(t)=e^{-i\omega_L(\sigma_z^A+\sigma_z^B)t/2}$ هامیلتونی مؤثر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_{\text{eff}}=U^+(t)HU(t)-iU^+(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (۲)$$
$$=H_{\text{eff}}^1+H_{\text{eff}}^2$$

به طوری که:

$$H_{\text{eff}}^1=\frac{\delta}{2}(\sigma_z^A+\sigma_z^B)+\Omega(\sigma_x^A+\sigma_x^B) \quad (۳)$$
$$H_{\text{eff}}^2=\sum_k\omega_k a_k^+a_k+[\sum_k g_k\alpha_k(\alpha_1\sigma_+^A+\alpha_2\sigma_+^B)e^{i\omega_L t}+H.C.]$$

و $\delta=\omega_0-\omega_L$. هامیلتونی H_{eff}^1 با قطری‌کردن به صورت $\frac{\omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_z^A+\tilde{\sigma}_z^B)$ ساده می‌شود که $\omega_1=\sqrt{\delta^2+4\Omega^2}$ و $\tilde{\sigma}_z^{A,B}=|1\rangle_j\langle 1|-|0\rangle_j\langle 0|,(j=1,2)$، در پایه‌های جدید هستند که $|1\rangle$ و $|0\rangle$ حالت‌های پوشیده‌ای هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$|1\rangle_j=\cos\frac{\theta}{2}|e\rangle_j+\sin\frac{\theta}{2}|g\rangle_j \quad (۴)$$
$$|0\rangle_j=-\sin\frac{\theta}{2}|e\rangle_j+\cos\frac{\theta}{2}|g\rangle_j,\ j=1,2$$

که در آن $\theta=\arctan(2\Omega/\delta)$. در نهایت، با نوشتن هامیلتونی H_{eff}^2 در پایه‌های جدید و اعمال تقریب موج چرخان، هامیلتونی مؤثر سامانه در پایه‌های جدید به شکل زیر داده می‌شود:

$$H'_{\text{eff}}=\frac{\omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_z^A+\tilde{\sigma}_z^B)+\sum_k\omega_k a_k^\dagger a_k+ \quad (۵)$$
$$\cos^2(\frac{\theta}{2})[\sum_k g_k a_k(\alpha_1\tilde{\sigma}_+^A+\alpha_2\tilde{\sigma}_+^B)e^{i\omega_L t}+\text{H.c.}]$$

با در نظر گرفتن یک برانگیختگی در کل سامانه، حالت اولیه را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد:

$$|\psi(0)\rangle=(c_1(0)|1\rangle_1|0\rangle_2+c_2(0)|0\rangle_1|1\rangle_2)|0_k\rangle_R \quad (۶)$$

لذا بردار حالت کل در زمان t به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle=(c_1(t)|1\rangle_1|0\rangle_2+c_2(t)|0\rangle_1|1\rangle_2)|0_k\rangle_R+\sum_k c_k(t)|0\rangle_1|0\rangle_2|1_k\rangle_R \quad (۷)$$

که حالت $|1_k\rangle_R$، حالت خلا منبع و حالت $|0_k\rangle_R$ مربوط به حالتی از منبع با یک برانگیختگی در مد kام است. اکنون با حل معادله شرودینگر وابسته به زمان، به معادلات جفت شده زیر می‌رسیم:

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

$$\dot{c}_1(t) = -\cos^4\frac{\theta}{2}\int_0^t dt_1 f(t-t_1)[\alpha_1^2 c_1(t_1) + \alpha_1\alpha_2 c_2(t_1)], \quad (۸)$$
$$\dot{c}_2(t) = -\cos^4\frac{\theta}{2}\int_0^t dt_1 f(t-t_1)[\alpha_1\alpha_2 c_1(t_1) + \alpha_2^2 c_2(t_1)],$$

تابع هم‌بستگی $f(t-t_1)$ مربوط به چگالی طیفی $J(\omega)$ است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(t-t_1) = \int d\omega J(\omega)\exp[i(\omega_L+\omega_1-\omega)(t-t_1)]. \quad (۹)$$

با انتخاب تابع توزیع چگالی طیفی به شکل لورنتسی [۸]:

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi}.\frac{\gamma_0\lambda^2}{(\omega_0-\omega-\Delta)^2+\lambda^2} \quad (۱۰)$$

شکل دقیق $c_1(t)$ و $c_2(t)$ مشخص می‌گردد. در اینجا ω_0 بسامد گذار اتمی، Δ نامیزانی بین بسامد اتمی و بسامد مرکزی میدان، پارامتر λ پهنای توزیع لورنتسی و γ_0 مربوط به واپاشی اتم برانگیخته در حد مارکوفی است. به طور کلی دو رژیم جفت‌شدگی ضعیف و قوی وجود دارد، در رژیم جفت‌شدگی ضعیف، $\gamma_0 < \frac{\lambda}{2}$ و زمان واهلش از زمان هم‌بستگی محیط بزرگتر است و رفتار سامانه مارکوفی نمایی است. اما در رژیم جفت‌شدگی قوی، $\gamma_0 > \frac{\lambda}{2}$ و زمان هم‌بستگی محیط از زمان واهلش بزرگتر بوده و رفتار سامانه لزوماً یک رفتار غیرمارکوفی است بنابراین اثرات غیرمارکوفی مانند احیا و نوسانات درهم‌تنیدگی غالب می‌شوند که این به دلیل حافظه طولانی مدت محیط است.

با استفاده از تبدیلات لاپلاس، دامنه‌های احتمال $c_1(t)$ و $c_2(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$c_1(t) = r_2^2 c_1(0) - r_1 r_2 c_2(0) + (r_1^2 c_1(0) + r_1 r_2 c_2(0))\xi(t) \quad (۱۱)$$
$$c_2(t) = r_1^2 c_2(0) - r_1 r_2 c_1(0) + (r_2^2 c_2(0) + r_1 r_2 c_1(0))\xi(t)$$

که $r_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}, j=1,2$ پارامترهای جفت‌شدگی نسبی با $r_1^2 + r_2^2 = 1$ هستند و از تعاریف زیر بهره جسته‌ایم:

$$\xi(t) = e^{\frac{-(\mu-i\Delta)t}{2}}[\cosh(\frac{\varepsilon t}{2}) + \frac{\mu-i\Delta}{\varepsilon}\sinh(\frac{\varepsilon t}{2})], \quad (۱۲)$$
$$\varepsilon = \sqrt{(\mu-i\Delta)^2 - \frac{\gamma_0\lambda(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{2}(1+\cos\theta)^2}, \mu = \lambda + i\delta - i\omega_1$$

۳- دینامیک درهم‌تنیدگی

برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی از معیار تلاقی [۹] استفاده می‌کنیم. تلاقی بین صفر (وقتی که حالت دو کیوبیت جداپذیر باشد) و یک (وقتی که کیوبیت‌ها کاملاً درهم‌تنیده باشند) تغییر می‌کند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(t) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (۱۳)$$

که $\lambda_i (i=1,2,3,4)$ ویژه‌مقادیر به ترتیب نزولی ماتریس هرمیتی $\rho(\sigma_y\otimes\sigma_y)\rho^*(\sigma_y\otimes\sigma_y)$ هستند که ρ^* همیوغ مختلط ρ است. با داشتن تابع‌موج کلی سامانه، می‌توان با گرفتن رد روی درجات آزادی محیط، ماتریس کاهش‌یافته اتمی را در پایه‌های $\{|1\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |0\rangle_1|0\rangle_2\}$ در زمان t به دست آورد:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_1(t)|^2 & c_1(t)c_2^*(t) & 0 \\ 0 & c_1^*(t)c_2(t) & |c_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-|c_1(t)|^2-|c_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (۱۴)$$

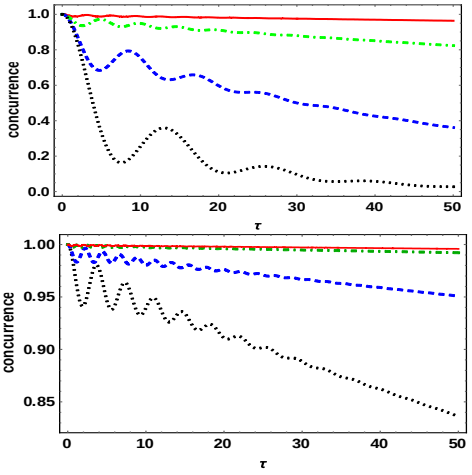
پس از انجام محاسبات، تلاقی این سامانه توصیف شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C(t) = 2\left|c_1(t)c_2^*(t)\right| \quad (۱۵)$$

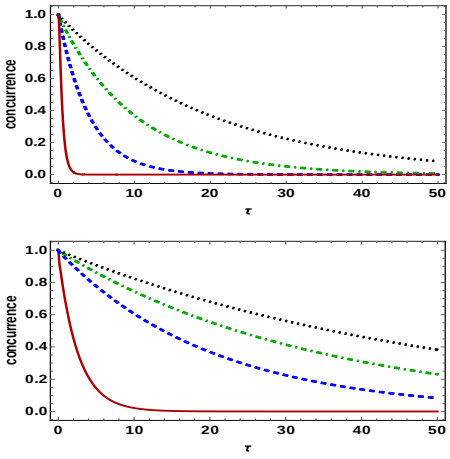
با توجه به معادلات $c_1(t)$ و $c_2(t)$، دینامیک درهم‌تنیدگی سامانه مورد بررسی را در محیط مارکوفی و غیر‌مارکوفی با فرض $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ در حضور نامیزانی بررسی می‌کنیم. در شکل ۱ میزان درهم‌تنیدگی را توسط کمیت تلاقی در حضور میدان کلاسیکی و به ازای پارامترهای مختلفی از بسامد رابی رسم نموده‌ایم. نمودار بالایی در حالت تشدید و نمودار پایینی در شرایط غیرتشدید در محیط غیرمارکوفی رسم شده است. نتایج ارائه شده در شکل ۱، حاکی از آن است که با افزایش نامیزانی و بسامد رابی میزان تلاقی بیشتر شده و به دلیل حافظه طولانی مدت محیط غیرمارکوفی تلاقی سامانه دوکیوبیتی به بیشینه مقدار خود (یک) رسیده است و غیرمارکوفی بودن محیط منجر به نوسانات درهم‌تنیدگی و احیای آن شده است. در شکل ۲، تلاقی سامانه برحسب $\tau = \gamma_0 t$ در حالت تشدید و غیرتشدید و در محیط مارکوفی (رژیم جفت‌شدگی ضعیف) رسم شده است. در این شکل مشاهده می‌کنیم که مارکوفی بودن محیط منجر به میرایی تلاقی به صورت نمایی می‌شود و در نهایت به حالت‌های غیردرهم‌تنیده می‌رسیم. هم‌چنین در می‌یابیم که با افزایش بسامد رابی و پارامتر نامیزانی میزان نگهداری درهم‌تنیدگی هم افزایش می‌یابد.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

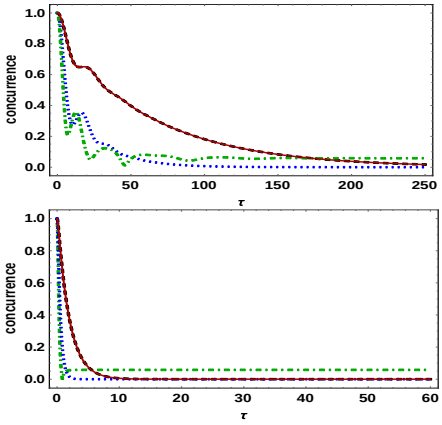


شکل۱: کمیت تلاقی برحسب $\tau=\gamma_0 t$ در محیط مشترک برای بسامدهای رابی متفاوت به ازای $\Delta=0$ (شکل بالا) و به ازای $\Delta=\gamma_0$ (شکل پایین). $\Omega=0$ (خط‌پیوسته)، $\Omega=0.1\gamma_0$ (خط‌چین)، $\Omega=\gamma_0$ (نقطه-خط) و $\Omega=3\gamma_0$ (نقطه‌چین) در یک محیط غیر-مارکوفی $\lambda=0.1\gamma_0$ با فرض $c_1(0)=c_2(0)=1/\sqrt{2}$.



شکل ۲: کمیت تلاقی برحسب $\tau=\gamma_0 t$ در محیط مشترک برای بسامدهای رابی متفاوت به ازای $\Delta=0$ (شکل بالا) و به ازای $\Delta=20\gamma_0$ (شکل پایین). $\Omega=0$ (خط‌پیوسته)، $\Omega=5\gamma_0$ (خط‌چین)، $\Omega=10\gamma_0$ (نقطه-خط) و $\Omega=15\gamma_0$ (نقطه‌چین) در یک محیط مارکوفی $\lambda=10\gamma_0$ با فرض $c_1(0)=c_2(0)=1/\sqrt{2}$.

با مقایسه شکل ۱ و ۲ مشاهده می‌کنیم که حفظ درهم-تنیدگی در محیط غیرمارکوفی از محیط مارکوفی بیشتر است. در شکل ۳، میزان درهم‌تنیدگی را توسط کمیت تلاقی در دو رژیم جفت‌شدگی قوی و ضعیف با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی از پارامتر جفت‌شدگی نسبی $r_1\neq r_2$ رسم نموده‌ایم. $r_1=0$ و $r_1=1$ هر دو نشان‌دهنده حالتی هستند که فقط یک کیوبیت با منبع برهم‌کنش کرده است و با در نظرگرفتن $r_1=1/\sqrt{2}$، هر دو کیوبیت به صورت متقارن با منبع جفت شده‌اند و هم‌چنین به ازای $r_1=\sqrt{3}/2$ هر دو کیوبیت با مقادیر مختلفی از r_1 و r_2 با منبع برهم‌کنش می‌کنند. از نمودار رسم شده مشاهده می‌کنیم که با انتخاب پارامتر جفت‌شدگی $r_1=0,1,1/\sqrt{2}$، میزان تلاقی سامانه بعد از گذشت زمان کاهش می‌یابد و در انتها به صفر می‌رسد و درهم‌تنیدگی سامانه از بین خواهد رفت. از طرف دیگر به ازای $r_1=\sqrt{3}/2$، مشاهده می‌کنیم که تلاقی به مقدار پایای غیرصفر $C(t)\approx 0.058$ کاهش می‌یابد و درهم‌تنیدگی به صفر نمی‌رسد.



شکل ۳: کمیت تلاقی برحسب $\tau=\gamma_0 t$ به ازای $\Delta=0$ و $\Omega=0.1\gamma_0$، در محیط غیرمارکوفی (شکل بالا) و محیط مارکوفی (شکل پایین). $r_1=0$ (خط‌پیوسته)، $r_1=1$ (خط‌چین)، $r_1=\sqrt{3}/2$ (نقطه-خط) و $r_1=1/\sqrt{2}$ (نقطه‌چین).

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی یک سامانه دو-کیوبیتی در یک محیط مشترک را بررسی کرده‌ایم. از نمودارهای رسم شده مشاهده کردیم که در محیط غیر-مارکوفی حفظ درهم‌تنیدگی نسبت به محیط مارکوفی بیشتر بوده و با اعمال میدان کلاسیکی و در حضور نامیزانی، با افزایش بسامد رابی میزان افزایش درهم-تنیدگی نیز بیشتر شده است. هم‌چنین، حفظ درهم-تنیدگی در مدت زمان طولانی‌تری تضمین می‌شود.

مراجع

[1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang; "*Quantum Computation and Quantum Information*"; (Cambridge University Press, 2000).
[2] T. Yu and J. Eberly, Phys. Rev. Lett. **93** 140404 (2004).
[3] C. Gardiner, P. Zoller; "*Quantum Noise"* (1999).
[4] B. Bellomo, R. L. Franco, and G. Compagno, Phys. Rev. Lett. **99**, 160502 (2007).
[5] X. Xiao, M.-F. Fang, Y.-L. Li, K. Zeng, C. Wu, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42** 235502 (2009).
[6] S. Maniscalco, F. Francica, R. L. Zaffino, N. L. Gullo, and F. Plastina, Phys. Rev. Lett. **100**, 090503 (2008).
[7] P. Haikka and S. Maniscalco, Phys. Rev. A **81** 052103 (2010).
[8] H.-P. Breuer and F. Petruccione; "*The Theory of Open Quantum Systems*", (New York: Oxford University Press, 2002).
[9] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]