بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۴-۱۲ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

پراش از ساختارهای دوره‌ای دو بعدی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی

علی محمد خزایی[۱]، سیف اله رسولی[۲،۱] و داود حبری[۱]
[۱]دانشکده فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان
[۲] مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان

چکیده – ساختارهای دوره‌ای یک و دو بعدی در اپتیک حائز اهمیت ویژه‌ای هستند و کاربردهای متعددی در اپتیک فوریه، سنجه‌شناسی و اندازه‌گیری‌های نوری دارند. در اینجا به بررسی پراش از ساختارهای دوبعدی ای که تابع عبور آنها در دستگاه قطبی تعریف و صرفاً وابستگی زاویه‌ای دارد می‌پردازیم، اگر این وابستگی دوره‌ای باشد این نوع ساختار را توری شعاعی می‌نامیم. ابتدا با نوشتن انتگرال فرنل در مختصات قطبی پراش از ساختارهای که تابع عبور آنها در مختصات قطبی جدایی‌پذیرند می‌پردازیم. نتیجه بصورت یک بسط برحسب تبدیلات هنکل قسمت شعاعی تابع عبور بدست می‌آید. سپس با استفاده از فرمول بندی کلی بدست آمده مورد خاص توری شعاعی فازی را بررسی می‌کنیم. نتایج محاسبات نظری، برآوردهای شبیه‌سازی و کارهای تجربیِ بررسی پراش از توری شعاعی فازی بعنوان ساده‌ترین ساختار دوره‌ای دو بعدی فازیِ جدایی پذیر در مختصات قطبی ارائه می‌شود. مشاهدات تجربی سازگاری خوبی با نتایج شبیه‌سازی رایانه‌ای و تحلیل‌های نظری دارد.

کلید واژه- ساختارهای دو بعدی جدایی پذیر، پراش ، مختصات قطبی، توری شعاعی فازی.

Diffractions from 2D periodic structures separable in polar coordinates

Ali Mohammad Khazaei[1], Saifollah Rasouli [1, 2], and Davud Hebri[1]
[1] Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran,
[2] Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran

Abstract- One and two-dimensional periodic structures are important in optics and they have numerous applications in the Fourier optics, optical measurements, and metrology. In this paper, diffraction from 2D structures in polar coordinate system having only angular dependency is investigated. If the dependency to be periodic then the structure so called radial grating. By use of Fresnel integral in the polar coordinate system we will investigate the diffraction of 2D separable structures in the polar system. The diffraction amplitude is obtained as a series of Henkel transformations. The theoretical approach is implemented to the case of radial phase grating. In addition, experimental work on the investigation of the diffraction from radial phase gratings having different periods and corresponding simulations are presented. Experimental works have a good consistent with the results of computer simulations and theoretical analyses.

Keywords: separable 2D periodic structures, diffraction, polar coordinates, phase radial grating.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

۱- مقدمه

توری‌ها از پرکاربردترین ادوات نوری هستند که استفاده‌های متعددی در شاخه‌های مختلف علم نورشناسی و فناوری‌های مرتبط دارند[۱]. متداول‌ترین نوع توری‌ها، انواع یک و دو بعدی آنها هستند که در دستگاه مختصات دکارتی ساختار عبوری یا فازی دوره‌ای دارند. بررسی پراش از چنین توری-هایی با روش‌های متعدد و با ارائه جزئیات انجام شده است. اما کلاس دیگری از ساختارهای دو بعدی یا توری‌های دوبعدی را می‌توان معرفی کرد که تناوب آنها در دستگاه مختصات قطبی تعریف شود. فرض کنید روی ورقه شفاف و مسطحی، مجموعه‌ای از نوارهای هم مرکز که تابع عبور این نوارها، یک در یک میان، مقادیر صفر و یک و یا مقادیر نزدیک به آنها باشند و زاویه مابین هر دو نوار مجاور برابر باشد را ترسیم کنیم آنگاه چنین ساختاری را توری شعاعیِ دامنه‌ای می‌نامیم. چنانچه تابع عبور دامنه این نوارها تغییر نکند در عوض راه نوری منتسب به این نوارها بطور دوره‌ای تغییر کند، آنگاه توری شعاعی فازی را خواهیم داشت.

شایان ذکر است توری‌های شعاعی کاربردهای مختص خود دارند[۲] و پیشتر بررسی طرح پراش میدان دور و نزدیک از توری‌های شعاعی دامنه‌ای توسط نویسندگان مقاله با استفاده از روشی متفاوت مبتنی بر انتگرال فرنل-کیرشهف و تعریف تابع عبور نهشتی ارائه شده است [۳].

اثر توری شعاعی فازی روی جبهه موج فرودی بلافاصله بعد از عبور از آن، مدولاسیون دوره‌ای فاز است. لذا تولید یا ساخت توری فازی معادل با مهیا کردن محیطی برای مدولاسیون فاز نور است. مدولاسیون فاز را می‌توان به یکی از روش‌های مدولاسیون مستقیم فاز و مدولاسیون فاز به روش هولوگرافی انجام داد. در این کار با استفاده از آرایه دو بعدی یک عدد LCD ساختار توری فازی شعاعی تامین می-شود.

در این کار نتایج تجربیِ بررسی پراش از توری شعاعی فازی بعنوان ساده‌ترین ساختار دوره‌ای دو بعدی فازیِ جدایی پذیر در مختصات قطبی ارائه می‌شود. همچنین برآوردهای شبیه-سازی متناظر با استفاده از نرم افزار Matlab ارائه می‌شود. مشاهدات تجربی توافق خوبی با نتایج شبیه‌سازی رایانه‌ای و تحلیل‌های نظری است.

۲- توصیف پراش میدان دور و نزدیک با استفاده از انتگرال فرنل- کیرشهف

فرض کنیم $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دامنه‌ی مختلط میدان نوری به ترتیب در $z=0$ و $z=z$ باشند، در تقریب فرنل داریم [۴]:

$$g(x,y)=h_0\iint f(x',y')\,e^{i\alpha[(x-x')^2+(y-y')^2]}dx'dy', \quad (۱)$$

که در آن $\alpha=\frac{\pi}{\lambda z}$ عدد موج و $h_0=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}$ و λ طول موج نور در خلأ و $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ عدد موج هستند. مختصات دکارتی x و y را می‌توان بر حسب مختصات قطبی به صورت زیر نوشت:

$$x=r\cos\theta, \qquad x'=r'\cos\theta', \quad (۲)$$
$$y=r\sin\theta, \qquad y'=r'\sin\theta',$$

که با جاگذاری آنها در انتگرال معادله (۱) خواهیم داشت:

$$g(\mathrm{r},\theta)=h_0\,e^{i\alpha r^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r'dr'\,d\theta'\;\mathrm{f}(\mathrm{r}',\theta')e^{i\alpha r'^2}\,\mathrm{e}^{-2i\alpha rr'\cos(\theta-\theta')}. \quad (۳)$$

با فرض اینکه دامنه مختلط در صفحه $z=0$ بر حسب مختصات قطبی جدایی پذیر باشد، یعنی:

$$\mathrm{f}(\mathrm{r}',\theta')=\mathrm{f}_R(\mathrm{r}')\,\mathrm{f}_\Theta(\theta'), \quad (۴)$$

رابطه (۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$g(\mathrm{r},\theta)=h_0\,e^{i\alpha r^2}\int_0^{\infty} r'dr' f_R(\mathrm{r}')e^{i\alpha r'^2}\int_0^{2\pi} d\theta'\;\mathrm{f}_\Theta(\theta')\,\mathrm{e}^{-2i\alpha rr'\cos(\theta'-\theta)}. \quad (۵)$$

با استفاده از اتحاد ژاکوبی آنژه خواهیم داشت [۵]:

$$\mathrm{e}^{-2i\alpha rr'\cos(\theta'-\theta)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-i)^m\,J_m(2\pi rr')e^{-im(\theta'-\theta)}, \quad (۶)$$

که در آن J_m نشان دهنده تابع بسل مرتبه m می‌باشد. همچنین تابع $\mathrm{f}_\Theta(\theta')$ را برحسب سری فوریه‌ی به صورت زیر بسط داد [۵]:

$$\mathrm{f}_\Theta(\theta')=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,e^{in\theta'}. \quad (۷)$$

با جاگذاری روابط (۶) و (۷) در رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$g(\mathrm{r},\theta)=2\pi h_0\,e^{i\alpha r^2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_m(-i)^m\,e^{im\theta}\int_0^{\infty}r'dr'f_R(\mathrm{r}')e^{i\alpha r'^2}J_m(2\pi\rho\,\mathrm{r}'), \quad (۸)$$

که در آن $\rho=\frac{r}{\lambda z}$ می‌باشد. با توجه به تعریف تبدیل هنکل مرتبه m خواهیم داشت [۵و۶]:

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

$$g(\mathrm{r},\theta)=h_0 e^{i\alpha r^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (-i)^m e^{im\theta} H_m\{f_R(\mathrm{r}) e^{i\alpha r^2}\}, \quad (۹)$$

که در آن H_m نشان دهنده تبدیل هنکل مرتبه m است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_m\{f(\mathrm{r})\}=2\pi\int_0^{\infty} f(r)\, J_m(2\pi\rho r) r\, dr. \quad (۱۰)$$

در ادامه، بعنوان یک مثال خاص پراش از یک توری شعاعی فازی با استفاده از فرمول بندی معرفی شده بررسی می‌شود.

۱-۲- پراش میدان دور و نزدیک یک توری شعاعی

توری شعاعی فازی یک نوع توری دارای تکینگی فازی است،که ضریب عبور آن بصورت $t(\theta')=e^{i\gamma\cos(n_0\theta')}$ است که در آن n_0 یک عدد صحیح مثبت (بار توپولوژیکی) برابر تعداد پره‌های توری می‌باشد. اگر نور تخت همدوس از چنین ساختاری عبور کند دامنه مختلط آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{f}(\mathrm{r}',\theta')=e^{i\gamma\cos(\mathrm{n}_0\theta')}. \quad (۱۱)$$

با مقایسه‌ی این رابطه با رابطه (۴) نتیجه می‌گیریم که $f_R(\mathrm{r}')=1$ و:

$$\mathrm{f}_\Theta(\theta')=e^{i\gamma\cos(\mathrm{n}_0\theta')}=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}(i)^q J_q(\gamma) e^{i q\, \mathrm{n}_0\theta'}. \quad (۱۲)$$

در اینجا یکبار دیگر از اتحاد ژاکوبی آنژه استفاده شده است. با مقایسه رابطه اخیر با رابطه (۷) در می‌یابیم که بسط فوریه $\mathrm{f}_\Theta(\theta')$ تنها به ازای $n=q\,n_0$ غیر صفر است. در نتیجه دامنه مختلط میدان نوری در فاصله z از توری شعاعی فازی، با توجه به رابطه (۹) بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g(\mathrm{r},\theta)=h_0 e^{i\alpha r^2} \sum_{q=-\infty}^{+\infty}(-i)^q J_q(\gamma)(-i)^{q\,n_0} e^{i q n_0\theta} H_{q n_0}\{e^{i\alpha r^2}\}. \quad (۱۳)$$

رابطه بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$g(\mathrm{r},\theta)=h_0 e^{i\alpha r^2}[J_0(\gamma)\mathrm{H}_0\{e^{i\alpha r^2}\} +\sum_{q=1}^{+\infty}(-i)^{q(n_0+1)} J_q(\gamma)\, H_{q n_0}\{e^{i\alpha r^2}\}\cos(q\, n_0\theta)], \quad (۱۴)$$

که در آن از ویژگی زیر برای تبدیل هنکل استفاده شده است

$$\mathrm{H}_{-m}\{f(\mathrm{r})\}=(-1)^m \mathrm{H}_m\{f(\mathrm{r})\}. \quad (۱۵)$$

تبدیلات هنکل مورد نیاز در اینجا بصورت زیر محاسبه می‌شوند[۳و۷]:

$$\mathrm{H}_0\{\mathrm{e}^{i\alpha r^2}\}=(\frac{i\pi}{\alpha})\mathrm{e}^{\frac{-i\pi^2\rho^2}{\alpha}}$$
$$H_m\{\mathrm{e}^{i\alpha r^2}\}=\frac{b}{4}(\frac{\pi}{\alpha})^{\frac{3}{2}} e^{-i\left(\frac{b^2}{8\alpha}-\frac{m\pi}{4}\right)}\left[J_{\frac{m+1}{2}}(\frac{b^2}{8\alpha})+i\ J_{\frac{m-1}{2}}(\frac{b^2}{8\alpha})\right], \quad (۱۶)$$

که در آن $b=2\pi\rho$ می‌باشد.

$$g(r,\theta)=[J_0(\gamma)+\sum_{q=1}^{+\infty}c_q\, r' e^{-i r'^2} \{J_{\frac{q n_0+1}{2}}(r'^2)+i\ J_{\frac{q n_0-1}{2}}(r'^2)\}\cos(q\, n_0\theta)], \quad (۱۷)$$

که در آن

$$c_q=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, J_q(\gamma)(\mathrm{i})^{\frac{q n_0}{2}}(-i)^{(n_0+1)q}, \quad r'=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\frac{r}{\lambda z}), \quad (۱۸)$$

می‌باشد و r' کمیتی بی‌بعد متناسب با فاصله شعاعی r است. نتایج حاصل از تحلیل الگوی پراش را در شکل ۱ نمایش داده‌ایم.



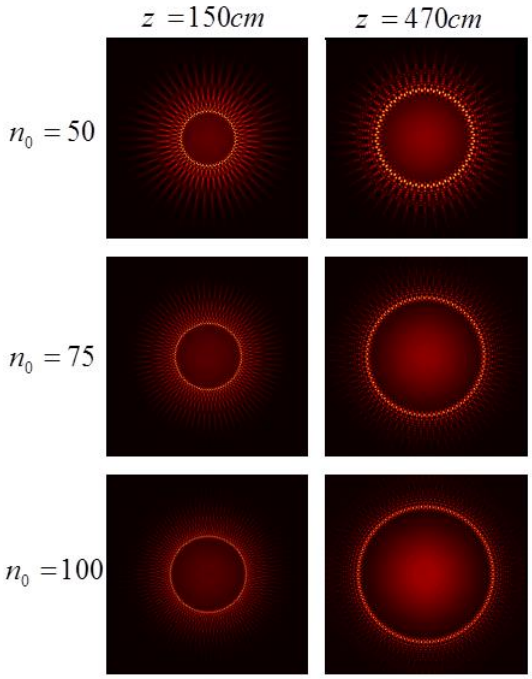
شکل ۱: طرح پراش بر حسب شعاع بی بعد r' برای توری‌های فازی با تعداد پره‌های $n_0=50$، $n_0=75$و $n_0=100$ که با استفاده روابط تحلیلی بدست آمده ترسیم شده‌اند.

۳- نتایج شبیه‌سازی و کار تجربی

برای بررسی نتایج تحلیلی، اقدام به شبیه سازی انتشار نور همدوس از توری‌های با $n_0=50$، $n_0=75$ و $n_0=100$ در فواصل مختلف نموده‌ایم، این نتایج در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. برای کار تجربی این مساله از هماهنگ دوم لیزر دیودیNd-YAG با طول موج $532nm$، یک قطبشگر، یک پالایه فضایی و یک عدسی برای تامین جبهه موج تخت و یک عدد LCD متصل به سیستم کامپیوتر که الگوی توری-های شعاعی فازی با تعداد پره‌های $n_0=50$، $n_0=75$ و $n_0=100$ را تولید می‌کرد استفاده کرده‌ایم.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

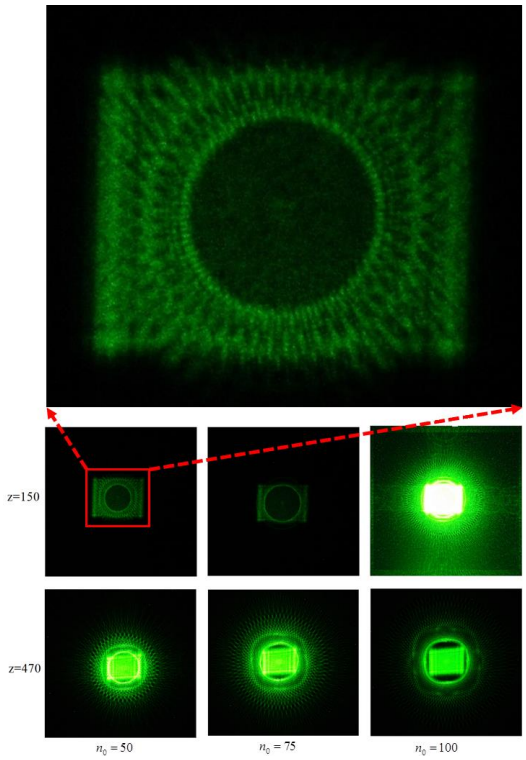


شکل ۲ نتایج شبیه سازی انتشار جبهه موج از میان سه توری شعاعی فازی با تعداد پره‌های $n_0=50$، $n_0=75$ و $n_0=100$ در فواصل $150cm$ و $470cm$ از آنها.

با مدوله کردن توری‌ها روی تلفیق‌گر مدولاسیون در برابر نور تخت قرار دادیم و از طرح پراش در فواصل مختلف عکس برداری نموده‌ایم که نتایج شکل ۳ بدست آمد.

۴- نتیجه‌گیری

در این کار، ابتدا ساختارهای فازی دوره‌ای دو بعدی جدایی-پذیر در دستگاه مختصات قطبی معرفی شد. سپس فرمول-بندی طرح پراش نور تخت از این نوع ساختارها در حالت کلی ارائه شد. سپس بعنوان ساده‌ترین مثال از ساختارهای فازی دوره‌ای دو بعدی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی، بررسی تجربیِ پراش از توری شعاعی فازی ارائه شد. همچنین برآوردهای شبیه‌سازی متناظر با استفاده از نرم افزار Matlab ارائه انجام گرفت. نتایج محاسبات نظری، شبیه‌سازی و مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که برخلاف طرح‌های پراش از توری‌های رانکی که طرح‌های پراش میدان‌های دور و نزدیک با هم فرق دارند در این نوع از توری‌ها، همانند نوع دامنه‌ای آنها [۳]، هر دو میدان‌های دور و نزدیک طرح‌های مشابهی دارند بطوریکه با دور شدن از توری شکل کلی طرح پراش تغییر نمی‌کند.



شکل ۳ نتایج تجربی بررسی انتشار جبهه موج از میان سه توری شعاعی فازی با تعداد پره‌های $n_0=50$، $n_0=75$ و $n_0=100$ در فواصل $150cm$ و $470cm$ از آنها. در این طرح‌ها سایه هندسی پنجره‌ی آرایه LCD هم دیده می‌شود.

مراجع

[1] Alonso, J., and E. Bernabeu. "Spatial evolution of Gaussian beams diffracted by radial gratings." *Optics communications* 98.4-6 (1993): 323-330.

[2] Koch, Jeffrey A., Steven Cui, and Michael A. McNeill. "Effective-focal-length calculations and measurements for a radial diffraction grating." *JOSA A* 16.11 (1999): 2690-2694.

[۳] داود حبری، سیف اله رسولی و علی محمد خزایی، *بررسی پراش میدان‌های نزدیک و دور از یک توری شعاعی با استفاده از تابع عبور نهشتی توری در محاسبه انتگرال فرنل-کیرشهف*، مقاله نامه کنفرانس فیزیک ایران، شهریور ۱۳۹۵.

[4] Saleh, Bahaa EA, Malvin Carl Teich, and Bahaa E. Saleh. *Fundamentals of photonics*. Vol. 22. New York: Wiley, 1991.

[۵] آرفکن، جورج، *روشهای ریاضی در فیزیک*، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۸۳.

[6] Goodman, Joseph W. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.

[7] Develis, John B., George B. Parrent, and Bria Thompson. *The new physical optics notebook: tutorials in Fourier optics*. Vol. 61. New York: SPIE Optical Engineering Press, 1989.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]