بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۴-۱۲ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

برآورد کوانتومی پارامتر واهمدوسی در تداخل سنج

بابک فرج الهی[۱]، مهدی امنیت طلب[۱] و حسین رنگانی جهرمی[۲]

[۱] گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی ۱۶۵، ارومیه

[۲] گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه جهرم، صندوق پستی ۷۴۱۳۷-۶۶۱۷۱، جهرم

چکیده – در این مقاله تغییرات کمیت اطلاعات فیشر کوانتومی برحسب پارامتر واهمدوسی در یک تداخل سنج مورد مطالعه قرار می گیرد. نشان داده خواهد شد که با افزایش واهمدوسی، اطلاعات فیشر کوانتومی کاهش می یابد و در نتیجه فرآیند برآورد پارامتر، غیر دقیق تر می شود. همچنین نشان داده می شود که در طول عبور ذره از شکافنده پرتو اول و دوم، اطلاعات فیشر کوانتومی تغییر نکرده و ثابت می ماند.

کلید واژه- نظریه اندازه گیری، اطلاعات فیشر کوانتومی، ماتریس چگالی، واهمدوسی

Quantum decoherence parameter estimation in an interferometer

Babak Farajollahi[1], Mahdi Amniat-Talab[1], Hossein Rangani Jahromi[2]

[1] Department of Physics, Faculty of Science, Urmia university, P. B. 165, Urmia, Iran

[2] Department of Physics, Faculty of Science, Jahrom university, P. B. 74137-66171, Jahrom

Abstract- In this article, we study the quantum Fisher information for decoherence parameter in an interferometer. It is shown that with increasing decoherence, the quantum Fisher information is reduced, and hence the process of parameter estimation becomes more inaccurate. We also show when the travelling particles encounter the first and second beam splitter, the quantum Fisher information does not change.

Keywords: quantum measurement, quantum Fisher information, density matrix, decoherence

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

۱- مقدمه

قلب مکانیک کوانتومی نظریه اندازه گیری است و یکی از مهمترین شاخه های این نظریه، مبحث برآورد پارامتر می باشد[۱] که هدف آن طراحی بهترین روش اندازه گیری است که بتواند بیش ترین اطلاعات ممکن را در مورد پارامتر ناشناخته ای که در حالت سامانه کوانتومی ذخیره شده است کسب استخراج نماید.[۲]

در این مقاله بعد از بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه بردار های ماتریس چگالی ذره در تداخل سنج ، کمیت مهم اطلاعات فیشر کوانتومی [۴,۳]، که در نظریه برآورد نقش اساسی را بازی می کند و معیاری از میزان اطلاعات استخراج شده از سامانه می باشد، را به ازای پارامتر واهمدوسی بدست آورده و رفتار آن را بررسی می نماییم.

۲- اطلاعات فیشر کوانتومی

N کپی از یک سامانه کوانتومی را در نظر می گیریم که تمامی کپی ها در حالت یکسان $\rho(\theta)$ که وابسته به پارامتر θ می باشد فراهم سازی شده اند. اگر بخواهیم اطلاعاتی را در مورد پارامتر ناشناخته θاستخراج نماییم، می بایست مجموعه ای از اندازه گیری هایی که توسط $\{\hat{E}(\zeta)\}POVM$[۱] توصیف می شوند انجام دهیم. اگر $\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_N$ بیانگر نتایج این اندازه گیری ها باشند، بنابر نظریه آنالیز اطلاعات می توان یک تابع $\hat{\theta}_{est}=\hat{\theta}_{est}(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_N)$ ، که *برآورد کننده* نامیده می شود، را برای تولید یک برآورد از پارامتر θ، تعریف نماییم به طوریکه $\langle\hat{\theta}_{est}\rangle_\theta = Tr\left(\rho(\theta)\hat{\theta}_{est}\right)$ برآوردی از پارامتر θ را می دهد[۵]. با توجه به اینکه $\langle(\delta\theta)^2\rangle_\theta$ به عنوان یک معیار آماری از دقت برآورد مورد استفاده قرار می گیرد، یک حد پایینی تحت عنوان نامساوی کرامر-راو روی $\langle(\delta\theta)^2\rangle_\theta$ به صورت زیر وجود دارد[۲]:

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle_\theta \geq \frac{1}{NF(\theta)} \qquad (۱)$$

که در آن،

$$F(\theta)\equiv\int d\zeta\,\frac{1}{P(\zeta|\theta)}\left(\frac{\partial P(\zeta|\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \qquad (۲)$$

اطلاعات فیشر [۴] نامیده می شود. با بیشینه سازی روی تمام اندازه گیری های ممکن می توان QFI را به صورت زیر تعریف نمود[۳]:

$$I_\theta=\max F(\theta) \qquad (۳)$$

بنابر نظریه برآورد کوانتومی، QFI معیاری از دقت برآورد پارامتر است. در نتیجه با افزایش آن، دقت برآورد بهبود می یابد. QFI می تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$I_\theta=Tr\left[\rho(\theta)L^2\right] \qquad (۴)$$

که در آن، L، را مشتق لگاریتمی متقارن می نامند و توسط رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{\partial\rho(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\left[L\rho(\theta)+\rho(\theta)L\right] \qquad (۵)$$

با استفاده از تجزیه طیفی برای $\rho(\theta)$

$$\rho(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\omega_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \qquad (۶)$$

می توان یک عبارت مناسب برای QFI بدست آورد[۶]:

$$I_\theta=\sum_i\frac{(\partial_\theta\omega_i)^2}{\omega_i}+2\sum_{i\neq j}\frac{(\omega_i-\omega_j)^2}{\omega_i+\omega_j}\left|\langle\phi_i|\partial_\theta\phi_j\rangle\right|^2 \qquad (۷)$$

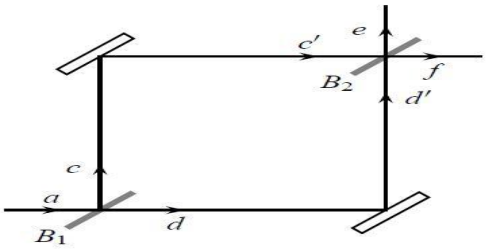
۳- مدل و محاسبات

حال ذره ای را در نظر می گیریم که از میان تداخل سنج شکل ۱ عبور می کند. پرتو ورودی در کانال a توسط شکافنده پرتو اول به دو شاخه c و d و به وسیله شکافنده پرتو دوم به دو کانال خروجی e و f جدا می شود.

[۱] Positive Operator-Valued Measure

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]



شکل ۱: ذره در حال عبور از میان تداخل سنج[۷]

تحول زمانی ذره و محیط اش هنگامی که ذره از داخل تداخل سنج عبور می کند به صورت زیر داده می شود که برای سادگی فرض می کنیم حالت محیط بین لحظات t_0 تا t_1 تغییر نمی کند [۲]:

$$\begin{aligned}&|\psi_0\rangle=|a\rangle|\varepsilon\rangle\mapsto\big(|c\rangle+|d\rangle\big)|\varepsilon\rangle/\sqrt{2}\mapsto\\&|\psi_2\rangle=\Big(|c'\rangle|\varepsilon'\rangle+|d'\rangle|\varepsilon''\rangle\Big)/\sqrt{2}\mapsto\\&|\psi_3\rangle=\Big[|e\rangle\big(|\varepsilon'\rangle-|\varepsilon''\rangle\big)+|f\rangle\big(|\varepsilon'\rangle+|\varepsilon''\rangle\big)\Big]/2\end{aligned}\qquad(۸)$$

بنابراین ماتریس چگالی برای ذره بعد از خروج از اولین شکافنده پرتو به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\rho_2=Tr_\varepsilon\big(|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\big)=\\&\frac{1}{2}\Big(|c'\rangle\langle c'|+|d'\rangle\langle d'|+\alpha|c'\rangle\langle d'|+\alpha^*|d'\rangle\langle c'|\Big)\end{aligned}\qquad(۹)$$

اگربه صورت ماتریسی نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\rho_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\alpha}{2}\\\frac{\alpha^*}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad(۱۰)$$

که در آن $\alpha=\langle\varepsilon''|\varepsilon'\rangle=\alpha'+i\alpha''$ است و $\{|\varepsilon'\rangle,|\varepsilon''\rangle\}$ ویژه حالت بهنجار شده محیط در زمان t_2 است. چون حالات $|\varepsilon'\rangle$و $|\varepsilon''\rangle$ بهنجار هستند، $|\alpha|$ نمی تواند بزرگتر از یک باشد. اگر $|\varepsilon'\rangle=|\varepsilon''\rangle$ آنگاه $\alpha'=\alpha=1$ و دیگر واهمدوسی وجود ندارد، بنابراین الگوی تداخلی مشابه وقتی است هیچ گونه برهم کنشی با محیط وجود ندارد و ذره همیشه در f پدیدار می شود. زمانی که $\alpha'=0$ اثر تداخلی ناپدید می شود ولی ذره با احتمال مساوی در e و f پدیدار می شود. این اتفاق حتی وقتی $|\alpha|$به نسبت بزرگ هم باشد رخ می دهد. اما در این صورت هنوز هم همدوسی قابل توجهی بین بسته های موج در بازوهای c و d وجود دارد و اثر تداخلی متناظر را می توان با تغییر در طول مسیر بین بازوهای c و d به اندازه ربع طول موج، که در عمل با کمی جابجا کردن شکافنده پرتو دوم حاصل می شود، آشکارسازی نمود. از این رو معقول به نظر می رسد $|\alpha|$ به جای α'به عنوان معیاری از همدوسی بین دو بازوی تداخل سنج و $1-|\alpha|$ به عنوان معیاری از میزان واهمدوسی استفاده گردد[۷]. با توجه به این که $\alpha=|\alpha|e^{i\theta}$ است، و با معرفی $\eta=1-|\alpha|$ به عنوان پارامتر واهمدوسی، ماتریس چگالی را می توان به صورت ذیل بازنویسی نمود:

$$\rho_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}(1-\eta)e^{i\theta}\\\frac{1}{2}(1-\eta)e^{-i\theta}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad(۱۱)$$

ماتریس چگالی ذره بعد از عبور از شکافنده پرتو دوم به صورت زیر داده می شود:

$$\rho_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-\alpha')&\frac{i\alpha''}{2}\\\frac{-i\alpha''}{2}&\frac{1}{2}(1+\alpha')\end{pmatrix}\qquad(۱۲)$$

که در آن:

$$\alpha'=|\alpha|\cos\theta\Rightarrow\alpha'=(1-\eta)\cos\theta\qquad(۱۳)$$

$$\alpha''=|\alpha|\sin\theta\Rightarrow\alpha''=(1-\eta)\sin\theta\qquad(۱۴)$$

با جاگذاری در رابطه (۱۲) ، بدست می آوریم:

$$\rho_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-\eta)\cos\theta&\frac{i}{2}(1-\eta)\sin\theta\\\frac{-i}{2}(1-\eta)\sin\theta&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\eta)\cos\theta\end{pmatrix}\qquad(۱۵)$$

هدف ما برآورد پارامتر واهمدوسی η می باشد. از این رو QFI را به ازای این پارامتر، برای ماتریس های چگالی فوق محاسبه می کنیم.

ویژه مقادیر ماتریس چگالی ρ_2 به صورت زیر بدست می آیند :

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\eta \qquad \omega_2 = -\frac{1}{2}\eta + 1 \qquad (۱۶)$$

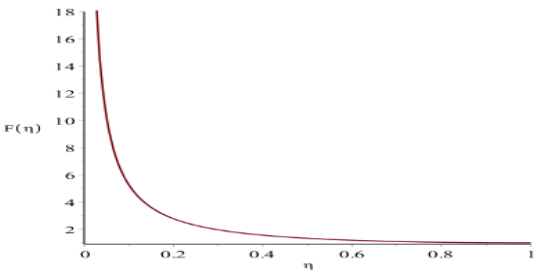
همچنین ویژه بردارهای ماتریس ρ_2 عبارتند از:

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} -e^{i\theta} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (۱۷)$$

با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) در (۷)، QFI را می توان به ازای پارامتر η بدست می آورد:

$$F_\eta = -\frac{1}{\eta(\eta-2)} \qquad (۱۸)$$

با رسم نمودار اطلاعات فیشر کوانتومی برحسب پارامتر واهمدوسی (شکل ۲):



شکل ۲: نمودار اطلاعات فیشر کوانتومی ماتریس چگالی ρ_2 برحسب پارامتر واهمدوسی η

مشاهده می شود که با افزایش پارامتر واهمدوسی، اطلاعات فیشر کوانتومی کاهش می یابد. بنابراین هر چه واهمدوسی ناشی از برهم کنش با محیط بیشتر باشد برآورد پارامتر واهمدوسی غیر دقیق تر شود.

به طور مشابه ویژه مقادیر ماتریس چگالی ρ_3 به صورت :

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\eta \qquad \omega_2 = -\frac{1}{2}\eta + 1 \qquad (۱۹)$$

و ویژه بردارهای ماتریس ρ_3 عبارتند از :

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{i\sin\theta}{\cos\theta+1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{i\sin\theta}{\cos\theta-1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (۲۰)$$

در نتیجه QFI برای ρ_3 به صورت زیر بدست می آید:

$$F_\eta = -\frac{1}{\eta(\eta-2)} \qquad (۲۱)$$

چون QFI برای ماتریس چگالی ρ_3 مشابه با QFI برای ماتریس چگالی ρ_2 بدست آمد، نمودار آن نیز مشابه شکل (۲) خواهد بود. مفهوم این تشابه آن است که در طول عبور ذره از شکافنده پرتو اول و دوم، برآورد پارامتر واهمدوسی تغییری نمی کند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله فرآیند برآورد پارامتر واهمدوسی در یک تداخل سنج مورد بررسی قرار گرفت. در این مدل یک ذره در داخل تداخل سنج تحت اثرات واهمدوسی ناشی از محیط قرار گرفته و با استفاده از کمیت QFI پس از عبور از اولین و دومین شکافنده باریکه، پارامتر واهمدوسی مورد برآورد قرار گرفت. نشان داده شد که در طول عبور ذره از شکافنده پرتو اول و دوم، QFI به ازای پارامتر واهمدوسی تغییر نمی کند. همچنین با افزایش پارامتر واهمدوسی فرآیند برآورد آن غیر دقیق تر می گردد.

مراجع

[۱] M. G. A. Paris, Int. J. Quantum. Inform**. 07**, 125 (2009)
[۲] H. Rangani, M. Amniat-Talab, Annals of Physics **355**, 299 (2015)
[۳] S. L. Braunstein et al., Annals of Physics **247**, 135 (1996)
[۴] C. W. Helstrom, *Quantum Detection Estimation Theory* (Academic, New York, 1976)
[۵] K. Berrada, Phys. Rev. A **88**,035806 (2013)
[۶] W. Zhong, Z. Sun, J. Ma, X. Wang, and F. Nori, Phys. Rev. A **87**, 022337 (2013)
[۷] R. B. Griffiths, *Consistent Quantum Theory*, Cambridge University Press, 2003.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]