



## بررسی تابع ویگنر در تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی و یک حالت همدوس غیرخطی

محمد قاضی، غلامرضا هنرآسا و علیرضا کشاورز

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده - در این مقاله به بررسی تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی دلخواه و یک حالت همدوس غیرخطی می‌پردازیم. به این منظور این دو حالت را به عنوان دو مد ورودی وارد تداخل‌سنج ماخ-زندر کرده و تابع ویگنر حالت خروجی را بررسی خواهیم کرد. در پایان رهیافت ارائه شده را برای دو حالت همدوس غیرخطی شناخته شده به کار خواهیم برد. نتایج نشان می‌دهد که میدان خروجی ویژگی غیرکلاسیکی دارد.

کلید واژه- تداخل کوانتومی، تابع ویگنر، حالت‌های همدوس غیرخطی

## Investigation of Wigner function in quantum interference between a number state and a nonlinear coherent state

Mohammad Ghaedi, Gholamreza Honarasa, and Alireza Keshavarz

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz

Abstract- In this paper quantum interference between an arbitrary number state and a nonlinear coherent state is investigated. For this purpose, these two states as the two input modes are injected into a Mach-Zehnder interferometer and Wigner function of the output state is studied. Finally, the presented formalism is applied to two known nonlinear coherent states. The results show that output field has non-classical property.

Keywords: Quantum interference, Wigner function, Nonlinear coherent states

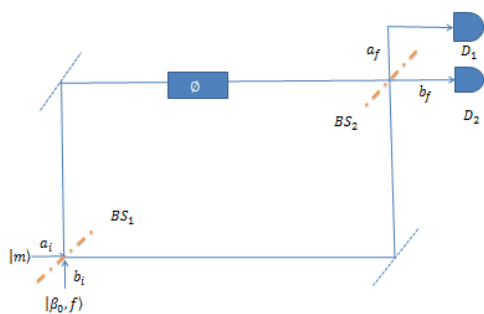
## ۱- مقدمه

تداخل کوانتومی یکی از بنیادی ترین مفاهیم ارتباطات کوانتومی و محاسبات کوانتومی و یکی از اصول چالش برانگیز در نظریه مکانیک کوانتومی است [۱]. از تداخل کوانتومی به عنوان یک ابزار مفید برای مشخص کردن میزان هم پوشانی بین بسته های موج در فرآیندهای کوانتومی استفاده می شود. تاکنون حالت های مختلفی از تداخل کوانتومی بین حالت خلا، حالت های عددی و حالت همدوس مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است [۲]. تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی تک فوتون و یک حالت همدوس در سال ۲۰۰۲ بررسی شد [۳]. مطالعه نظری تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی فوتون دلخواه و یک حالت همدوس توسط ایکسانگ و همکارانش انجام شد [۴].

یکی از تعمیم های حالت های همدوس استاندارد، حالت های همدوس غیر خطی است. این حالت ها که توسط فوگل و همکارانش [۵] و مانکو [۶] معرفی شده اند از جمله مهمترین حالت های همدوس تعمیم یافته قلمداد می شوند. تاکنون تداخل کوانتومی بین حالت های عددی و حالت های همدوس غیر خطی بررسی نشده است. در این مقاله به بررسی تابع ویگنر در تداخل کوانتومی بین حالت های عددی و حالت های همدوس غیر خطی بررسی می پردازیم.

## ۲- تداخل کوانتومی

تداخل سنج ماخ-زندر (MZI) به عنوان یک تداخل سنج متداول بدون افت که دارای دو ورودی و دو خروجی می باشد را در نظر می گیریم و سپس تابع ویگنر خروجی را برای زمانی که یک حالت عددی فوتون دلخواه  $|m\rangle$  و یک حالت همدوس غیر خطی  $|\beta_0, f\rangle$  به عنوان ورودی است را به دست می آوریم. مطابق شکل ۱ یک تداخل سنج ماخ-زندر شامل دو پرتو شکاف، دو آینه و یک جابه جایی فاز  $\phi$  است. در این چیدمان دو مد اپتیکی  $a_i$  و  $b_i$  در یک پرتو شکاف ۵۰/۵۰ با یکدیگر ترکیب و در امتداد دو مسیر با طول های متفاوت که به صورت یک جابه جایی فاز در نظر گرفته می شود، منتشر می شوند. سپس مجدداً از طریق پرتو شکاف ۵۰/۵۰ دوم با یکدیگر ادغام شده و دو مد اپتیکی  $a_f$  و  $b_f$  به وجود می آید.



شکل ۱: نمایی از تداخل سنج ماخ-زندر با حالت های عددی و حالت های همدوس غیر خطی به عنوان ورودی.

با در نظر گرفتن ماتریس پراکندگی برای پرتو شکاف ها و جابه جایی فاز  $\phi$  روابط زیر بین دامنه های مختلط مدهای خروجی  $(\alpha_f, \beta_f)$  و ورودی  $(\alpha_i, \beta_i)$  تداخل سنج ماخ-زندر به دست می آید [۷]:

$$\begin{aligned} \alpha_i(\alpha_f; \beta_f) &= -B^* \alpha_f + A^* \beta_f, \\ \beta_i(\alpha_f; \beta_f) &= A^* \alpha_f + B^* \beta_f \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $A$  و  $B$  از رابطه زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} A &= i \exp[i(\phi/2)] \cos(\phi/2) \\ B &= i \exp[i(\phi/2)] \sin(\phi/2) \end{aligned} \quad (2)$$

## ۳- تابع ویگنر

تابع ویگنر بهترین انتخاب برای بررسی ویژگی های کوانتومی یک میدان اپتیکی است. این تابع برای اولین بار در سال ۱۹۳۲ توسط ویگنر معرفی شد [۸]. منفی شدن تابع توزیع ویگنر به معنی غیر کلاسیکی بودن حالت یا میدان مورد نظر است.

حالت های همدوس غیر خطی به عنوان ویژه حالت عملگر نابودی تغییر شکل یافته  $a f(n)$  (که در آن  $a$  عملگر نابودی بوزونی و  $f(n)$  تابعی از  $n=a^\dagger a$  است) به صورت زیر تعریف می شوند [۵ و ۶]:

$$|\beta_0, f\rangle = N_{\beta_0, f} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_0^n}{\sqrt{n! [f(n)]!}} |n\rangle \quad (3)$$

که در آن  $N_{\alpha, f} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_0|^{2n}}{n! [f(n)]!^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$  ضریب بهنجارش

و  $[f(n)]! = f(n) f(n-1) \dots f(1)$  است. تابع ویگنر حالت

$$W_{out}(\alpha_f; \beta_f) = \frac{4(-1)^m}{\pi^2} e^{-2|\alpha_f|^2 - 2|\beta_f|^2} \times L_m(4| -B^* \alpha_f + A^* \beta_f |^2) \times N_{\beta_0, f}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_0^*)^k (\beta_0)^n}{k! f(k)! f(n)!} \times (-2(A\alpha_f^* + B\beta_f^*))^{k-n} \times L_n^{k-n}(4|A^* \alpha_f + B^* \beta_f|^2) \quad (9)$$

تابع ویگنر مد  $a_f$ ،  $W_{a_f}(\alpha_f)$  با انتگرال گرفتن  $W_{out}(\alpha_f; \beta_f)$  روی  $\beta_f$  مختلط به دست می‌آید:

$$W_{a_f}(\alpha_f) = \int d^2 \beta_f W_{out}(\alpha_f; \beta_f). \quad (10)$$

با جایگذاری (۹) در معادله (۱۰) و برای حالت  $\phi = 0$  تابع ویگنر مد  $a_f$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$W_{a_f}(\alpha_f) = \frac{2}{\pi} \exp[(-2|\alpha_f|^2)] \times N_{\beta_0, f}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_0^*)^k (\beta_0)^n}{k! f(k)! f(n)!} \times (-2(A\alpha_f^*)^{k-n} \times L_n^{k-n}(4|A^* \alpha_f|^2)) \quad (11)$$

#### ۴- بررسی نتایج

در این بخش به بررسی تابع ویگنر در تداخل بین یک حالت عددی و حالت همدوس غیرخطی متناظر با حالت‌های پنسون-سولومون و پتانسیل پوشل-تلمر می‌پردازیم.

حالت‌های همدوس زیر توسط پنسون-سولومون معرفی شد [۹]:

$$|q, z\rangle_{PS} = N(q, |z|^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n!}} z^n |n\rangle \quad (12)$$

که  $N(q, |z|^2)^{-\frac{1}{2}}$  ضریب بهنجارش و  $0 \leq q \leq 1$  است. تابع غیر خطی این حالت‌ها به صورت  $f_{PS}(n) = q^{1-n}$  است.

همدوس غیرخطی  $|\beta_0, f\rangle = |n_c^{\frac{1}{2}} \exp(i\phi_c)\rangle$  به صورت زیر به دست می‌آید [۶]:

$$W_{|\beta_0, f\rangle}(\beta) = \frac{2}{\pi} \times (N_{\beta_0, f})^2 \times \exp[-2|\beta|^2] \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_0^*)^k (\beta_0)^n}{k! f(k)! f(n)!} (-2\beta^*)^{k-n} \times L_n^{k-n}(4|\beta|^2) \quad (4)$$

همچنین تابع ویگنر حالت عددی  $|m\rangle$  به صورت زیر است [۴]:

$$W_{|m\rangle}(\alpha) = \frac{2(-1)^m \exp[-2|\alpha|^2]}{\pi} L_m(4|\alpha|^2) \quad (5)$$

که در آن  $L_m(4|\alpha|^2)$  چند جمله‌ای لاگر است.

وقتی تابع ویگنر  $W_{\rho_1}(\alpha)$  و  $W_{\rho_2}(\beta)$  به ترتیب متناظر با حالت‌های ورودی  $\rho_1$  و  $\rho_2$  در تداخل سنچ ماخ-زندر هستند تابع ویگنر ورودی تداخل سنچ متناظر با حالت ورودی  $\rho_1 \otimes \rho_2$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_{in}(\alpha; \beta) = W_{\rho_1}(\alpha) W_{\rho_2}(\beta) \quad (6)$$

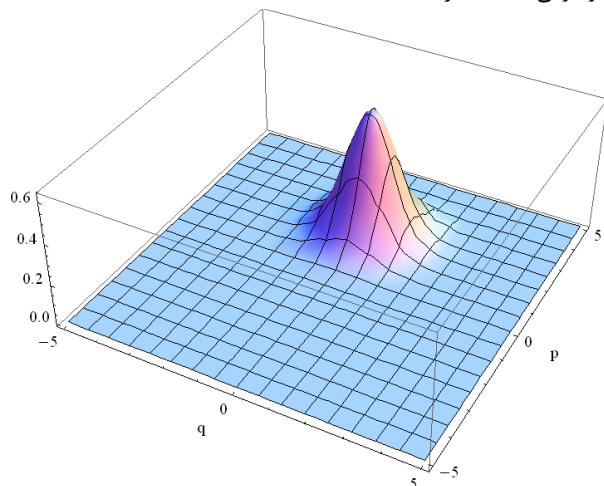
رابطه بین تابع ویگنر خروجی و تابع ویگنر ورودی به صورت زیر داده می‌شود:

$$W_{out}(\alpha_f; \beta_f) = W_{in}(\alpha_i(\alpha_f; \beta_f); \beta_i(\alpha_f; \beta_f)) \quad (7)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۴) و (۵) تابع ویگنر ورودی و خروجی تداخل سنچ ماخ-زندر وقتی یک حالت عددی و یک حالت همدوس غیرخطی به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$W_{in}(\alpha_i; \beta_i) = \frac{4(-1)^m}{\pi^2} e^{-2|\alpha_i|^2 - 2|\beta_i|^2} L_m(4|\alpha_i|^2) \times N_{\beta_0, f}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_0^*)^k (\beta_0)^n}{k! f(k)! f(n)!} \times (-2\beta^*)^{k-n} L_n^{k-n}(4|\beta_i|^2) \quad (8)$$

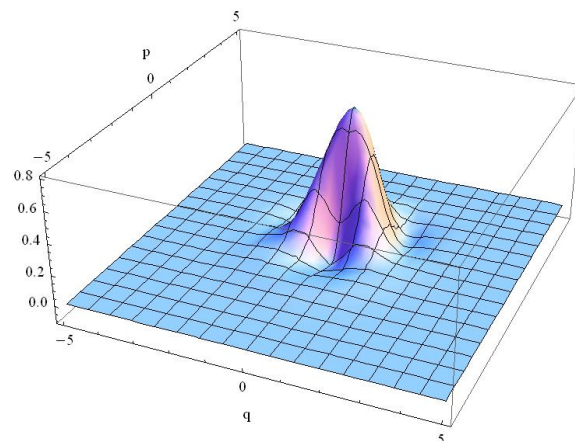
حالی است که اگر تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی و یک حالت همدوس استاندارد ( $f(n)=1$ ) را در نظر بگیریم تابع ویگنر آن همانطور که در شکل ۴ دیده می شود در تمام نقاط مثبت است. بنابراین در تداخل کوانتومی یک حالت همدوس غیرخطی و یک حالت عددی حتی به ازای  $\phi=0$  میدان خروجی کاملاً کوانتومی بوده و می توان از آن در ارتباطات کوانتومی یا رمزنگاری کوانتومی استفاده کرد.



شکل ۴: تابع ویگنر خروجی مد  $a_f$  با ورودی  $n_c = 2(\phi_c = 0)$  و  $m = 2$  با فاز  $\phi = 0$  برحسب  $\alpha_f = q + ip$  برای حالت همدوس استاندارد  $f(n)=1$ .

## مراجع

- [1] A. Ourjoumtsev, M-C. Dheur, T. Avignon and L. Jacubwies, "Two-photon quantum interference for an undergraduate lab", Eur. J. Phys., Vol. 36, pp. 065034-065040, 2015.
- [2] A. Windehager, M. Suda, C. Pacher, C. Peev, A. Poppe, "Quantum interference between a single-photon Fock state and a coherent state", Opt. Commun., Vol. 284, pp., 1907-1912, 2011.
- [3] A. I. Lvovsky, S. Babichev, "Synthesis and tomographic characterization of the displaced Fock state of light", Phys. Rev. A, Vol. 66, pp. 011801, 2002
- [4] X.-X. Xu, F. Jia, L.-Y. Hu, Z.-L. Duan, Q. Guo and S.-J. Ma, "Quantum interference between an arbitrary-photon Fock state and a coherent state", J. Mod. Opt., Vol. 59, pp. 1624-1633, 2012.
- [5] R. L. de Matos Filho and W. Vogel, "Nonlinear coherent states", Phys. Rev. A, Vol. 54, pp. 4560-4563, 1996.
- [6] V. I. Manko, G. Marmo, E. C. G Sudarshan and F. Zaccaria, "f-oscillators and nonlinear coherent states", Phys. Scr., Vol. 55, pp. 528-541, 1997.
- [7] M. Ernst, *The Principles of Physical Optics*; Dover: New York, 2003.
- [8] E. Wigner, "On the Quantum correction for thermodynamic equilibrium", Phys. Rev., Vol. 40, pp. 749-759, 1932.
- [9] K. A. Penson, A. I. Solomon, "New generalized coherent States", J. Maths. Phys. Vol. 40, pp. 2354, 1999.
- [10] J. P. Antoine, J.-P. Gaazeau, J. R. Klauder, P. Monceau, K. A. Penson., J. Math. Phys. Vol. 42, pp. 2349, 2001.

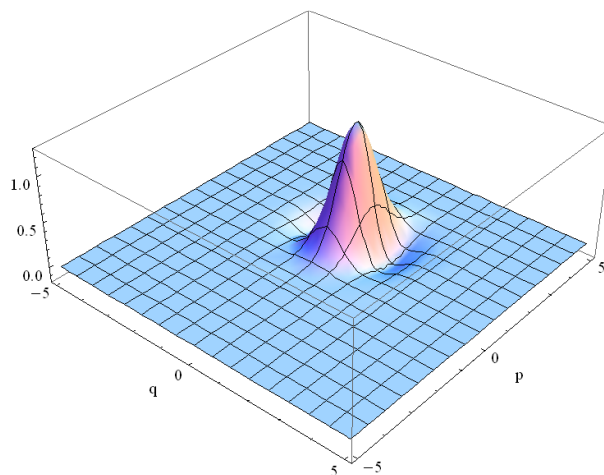


شکل ۲: تابع ویگنر خروجی مد  $a_f$  با ورودی  $n_c = 2(\phi_c = 0)$  و  $m = 2$  با فاز  $\phi = 0$  برحسب  $\alpha_f = q + ip$  برای حالت همدوس پنسون سولومون.

طیف پتانسیل پوشل-تالر به صورت زیر است [۱۰]:

$$e_n = n(n + \nu) \quad (13)$$

که در آن  $\nu > 2$  است. تابع غیرخطی این پتانسیل برابر  $f_{PT}(n) = \sqrt{n + \nu}$  است.



شکل ۳: تابع ویگنر خروجی مد  $a_f$  با ورودی  $n_c = 2(\phi_c = 0)$  و  $m = 2$  با فاز  $\phi = 0$  برحسب  $\alpha_f = q + ip$  برای پتانسیل پوشل-تالر.

در شکل ۲ و ۳ تابع ویگنر مد  $a_f$  در خروجی تداخل سنج ماخ-زندر وقتی که یک حالت عددی با  $m = 2$  و یک حالت همدوس غیرخطی (حالت همدوس غیرخطی پنسون-سولومون در شکل ۲ و حالت همدوس متناظر با پتانسیل پوشل-تالر در شکل ۳) به عنوان ورودی به تداخل سنج وارد می شوند، نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود در هر دو شکل در برخی نقاط تابع ویگنر منفی است که نشان می دهد میدان خروجی غیرکلاسیکی است. این در