بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

بررسی تابع ویگنر در تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی و یک حالت همدوس غیرخطی

محمد قائدی، غلامرضا هنرآسا و علیرضا کشاورز

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده – در این مقاله به بررسی تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی دلخواه و یک حالت همدوس غیرخطی می‌پردازیم. به این منظور این دو حالت را به عنوان دو مد ورودی وارد تداخل‌سنج ماخ-زندر کرده و تابع ویگنر حالت خروجی را بررسی خواهیم کرد. در پایان رهیافت ارائه شده را برای دو حالت همدوس غیرخطی شناخته شده به کار خواهیم برد. نتایج نشان می‌دهد که میدان خروجی ویژگی غیرکلاسیکی دارد.

کلید واژه- تداخل کوانتومی، تابع ویگنر، حالت‌های همدوس غیرخطی

Investigation of Wigner function in quantum interference between a number state and a nonlinear coherent state

Mohammad Ghaedi, Gholamreza Honarasa, and Alireza Keshavarz

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz

Abstract- In this paper quantum interference between an arbitrary number state and a nonlinear coherent state is investigated. For this purpose, these two states as the two input modes are injected into a Mach-Zehnder interferometer and Wigner function of the output state is studied. Finally, the presented formalism is applied to two known nonlinear coherent states. The results show that output field has non-classical property.

Keywords: Quantum interference, Wigner function, Nonlinear coherent states

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

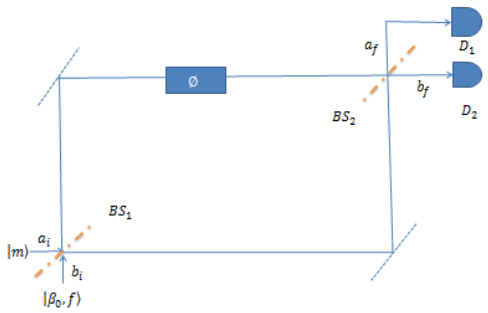
۱- مقدمه

تداخل‌کوانتومی یکی از بنیادی ترین مفاهیم ارتباطات کوانتومی و محاسبات کوانتومی و یکی از اصول چالش برانگیز در نظریه مکانیک کوانتومی است[۱]. از تداخل کوانتومی به عنوان یک ابزار مفید برای مشخص کردن میزان هم‌پوشانی بین بسته‌های موج در فرآیندهای کوانتومی استفاده می‌شود. تاکنون حالت‌های مختلفی از تداخل کوانتومی بین حالت خلا، حالت‌های عددی و حالت همدوس مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است [۲]. تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی تک‌فوتون و یک حالت همدوس در سال ۲۰۰۲ بررسی شد[۳]. مطالعه نظری تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی فوتون دلخواه و یک حالت همدوس توسط ایکسانگ و همکارانش انجام شد [۴].

یکی از تعمیم‌های حالت‌های همدوس استاندارد، حالت‌های همدوس غیرخطی است. این حالت‌ها که توسط فوگل و همکارانش [۵] و مانکو [۶] معرفی شده‌اند از جمله مهمترین حالت‌های همدوس تعمیم یافته قلمداد می‌شوند. تاکنون تداخل کوانتومی بین حالت‌های عددی و حالت‌های همدوس غیرخطی نشده است. در این مقاله به بررسی تابع ویگنر در تداخل کوانتومی بین حالت‌های عددی و حالت‌های همدوس غیرخطی بررسی می‌پردازیم.

۲- تداخل کوانتومی

تداخل سنج ماخ-زندر(MZI) به عنوان یک تداخل سنج متداول بدون افت که دارای دو ورودی و دو خروجی می‌باشد را در نظر می گیریم و سپس تابع ویگنر خروجی را برای زمانی که یک حالت عددی فوتون دلخواه $|m\rangle$و یک حالت همدوس غیر خطی $|\beta_0, f\rangle$به عنوان ورودی است را به‌دست می‌آوریم. مطابق شکل ۱ یک تداخل‌سنج ماخ-زندر شامل دو پرتو شکاف، دو آینه و یک جابه جایی فاز ϕ است. در این چیدمان دو مد اپتیکی a_i و b_iدر یک پرتوشکاف ۵۰/۵۰ با یکدیگر ترکیب و در امتداد دو مسیر با طول‌های متفاوت که به صورت یک جابه جایی فاز در نظر گرفته می شود، منتشر می‌شوند. سپس مجددا از طریق پرتوشکاف ۵۰/۵۰ دوم با یکدیگر ادغام شده و دو مد اپتیکی a_f و b_fبه وجود می‌آید.



شکل۱: نمایی از تداخل سنج ماخ-زندر با حالت‌های عددی و حالت‌های همدوس غیرخطی به عنوان ورودی.

با در نظر گرفتن ماتریس پراکندگی برای پرتوشکاف‌ها و جابه جایی فاز ϕ روابط زیر بین دامنه‌های مختلط مدهای خروجی (α_fو β_f) و ورودی (α_iو β_i) تداخل‌سنج ماخ-زندر به‌دست می‌آید[۷]:

$$\alpha_i(\alpha_f;\beta_f) = -B^*\alpha_f + A^*\beta_f,$$
$$\beta_i(\alpha_f;\beta_f) = A^*\alpha_f + B^*\beta_f \qquad (۱)$$

که در آن A و B از رابطه زیر به دست می آیند:

$$A = i\exp[i(\phi/2)]\cos(\phi/2)$$
$$B = i\exp[i(\phi/2)]\sin(\phi/2) \qquad (۲)$$

۳- تابع ویگنر

تابع ویگنر بهترین انتخاب برای بررسی ویژگی‌های کوانتومی یک میدان اپتیکی است. این تابع برای اولین بار در سال ۱۹۳۲ توسط ویگنر معرفی شد [۸]. منفی شدن تابع توزیع ویگنر به معنی غیرکلاسیکی بودن حالت یا میدان مورد نظر است.

حالت‌های همدوس غیر خطی به عنوان ویژه حالت عملگر نابودی تغییر شکل یافته $a\,f(n)$ (که در آن aعملگر نابودی بوزونی و $f(n)$ تابعی از $n=a^\dagger a$ است)به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵ و۶]:

$$|\beta_0, f\rangle = N_{\beta_0,f}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{\beta_0}^n}{\sqrt{n!}[f(n)]!}|n\rangle \qquad (۳)$$

که در آن $N_{\alpha,f} = (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\beta_0|^{2n}}{n!\{[f(n)]!\}^2})^{\frac{-1}{2}}$ ضریب بهنجارش و $[f(n)]! = f(n)\,f(n-1)\ldots f(1)$ است. تابع ویگنر حالت

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

همدوس غیرخطی $|\beta_0, f\rangle = \left|n_c^{1/2}\exp(i\phi_c)\right\rangle$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۶]:

$$W_{|\beta_0,f\rangle}(\beta) = \frac{2}{\pi}\times(N_{\beta_0,f})^2\times\exp[-2|\beta|^2] \times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_0^*)^k}{k!\,f(k)!}\frac{(\beta_0)^n}{f(n)!}(-2\beta^*)^{k-n} \times L_n^{k-n}(4|\beta|^2) \quad (۴)$$

همچنین تابع ویگنر حالت عددی $|m\rangle$ به صورت زیر است [۴]:

$$W_{|m\rangle}(\alpha) = \frac{2(-1)^m\exp[-2|\alpha|^2]}{\pi}L_m(4|\alpha|^2) \quad (۵)$$

که در آن $L_m(4|\alpha|^2)$ چند جمله‌ای لاگر است.

وقتی تابع ویگنر $W_{\rho_1}(\alpha)$ و $W_{\rho_2}(\beta)$ به ترتیب متناظر با حالت‌های ورودی ρ_1 و ρ_2 در تداخل‌سنج ماخ-زندر هستند تابع ویگنر ورودی تداخل‌سنج متناظر با حالت ورودی $\rho_1\otimes\rho_2$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_{in}(\alpha;\beta) = W_{\rho_1}(\alpha)W_{\rho_2}(\beta) \quad (۶)$$

رابطه بین تابع ویگنر خروجی و تابع ویگنر ورودی به صورت زیر داده می شود:

$$W_{out}(\alpha_f;\beta_f) = W_{in}(\alpha_i(\alpha_f;\beta_f);\beta_i(\alpha_f;\beta_f)) \quad (۷)$$

بنابراین با استفاده از روابط (۴) و (۵) تابع ویگنر ورودی و خروجی تداخل‌سنج ماخ-زندر وقتی یک حالت عددی و یک حالت همدوس غیرخطی به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$W_{in}(\alpha_i;\beta_i) = \frac{4(-1)^m}{\pi^2}e^{-2|\alpha_i|^2-2|\beta_i|^2}L_m(4|\alpha_i|^2) \times N_{\beta_0,f}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_0^*)^k(\beta_0)^n}{k!\,f(k)!\,f(n)!} \times(-2\beta^*)^{k-n}L_n^{k-n}(4|\beta_i|^2) \quad (۸)$$

$$W_{out}(\alpha_f;\beta_f) = \frac{4(-1)^m}{\pi^2}e^{-2|\alpha_f|^2-|\beta_f|^2} \times L_m(4\left|-B^*\alpha_f + A^*\beta_f\right|^2) \times N_{\beta_0,f}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_0^*)^k(\beta_0)^n}{k!\,f(k)!\,f(n)!} \times(-2(A\alpha_f^* + B\beta_f^*))^{k-n} \times L_n^{k-n}(4\left|A^*\alpha_f + B^*\beta_f\right|^2) \quad (۹)$$

تابع ویگنر مد a_f، $W_{a_f}(\alpha_f)$ با انتگرال گرفتن $W_{out}(\alpha_f;\beta_f)$ روی β_f مختلط به دست می‌آید:

$$W_{a_f}(\alpha_f) = \int d^2\beta_f W_{out}(\alpha_f;\beta_f). \quad (۱۰)$$

با جایگذاری (۹) در معادله (۱۰) و برای حالت $\phi = 0$ تابع ویگنر مد a_f به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$W_{a_f}(\alpha_f) = \frac{2}{\pi}\exp[(-2|\alpha_f|^2)] \times N_{\beta_0,f}^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_0^*)^k(\beta_0)^n}{k!\,f(k)!\,f(n)!} \times(-2(A\alpha_f^*)^{k-n}\times L_n^{k-n}(4\left|A^*\alpha_f\right|^2) \quad (۱۱)$$

۴- بررسی نتایج

در این بخش به بررسی تابع ویگنر در تداخل بین یک حالت عددی و حالت همدوس غیرخطی متناظر با حالت‌های پنسون-سولومون و پتانسیل پوشل- تلر می‌پردازیم.

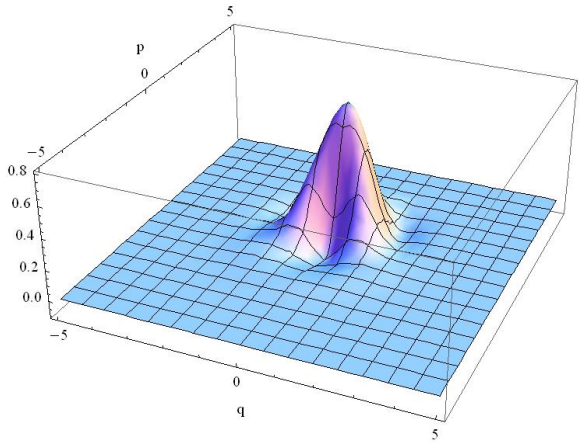
حالت‌های همدوس زیر توسط پنسون-سولومون معرفی شد[۹]:

$$|q,z\rangle_{PS} = N(q,|z|^2)^{\frac{-1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n!}}z^n|n\rangle \quad (۱۲)$$

که $N(q,|z|^2)^{-1/2}$ ضریب بهنجارش و $0\le q\le 1$ است. تابع غیر خطی این حالت‌ها به‌صورت $f_{PS}(n) = q^{1-n}$ است.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

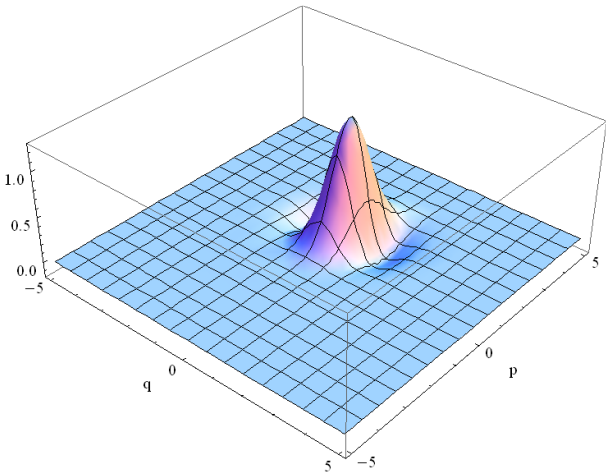


شکل۲: تابع ویگنر خروجی مد a_f با ورودی $n_c = 2(\phi_c = 0)$ و $m = 2$ با فاز $\phi = 0$ برحسب $\alpha_f = q + ip$ برای حالت همدوس پنسون سولومون.

طیف پتانسیل پوشل-تلر به‌صورت زیر است[۱۰]:

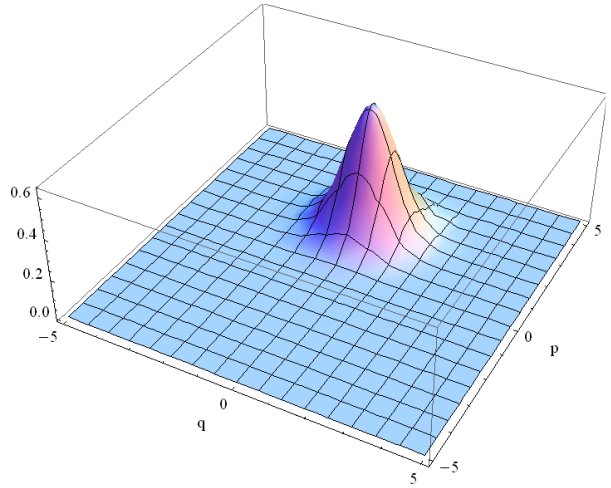
$$e_n = n(n+\nu) \qquad (۱۳)$$

که در آن $\nu > 2$ است. تابع غیرخطی این پتانسیل برابر $f_{PT}(n) = \sqrt{n+\nu}$ است.



شکل۳: تابع ویگنر خروجی مد a_f با ورودی $n_c = 2(\phi_c = 0)$ و $m = 2$ با فاز $\phi = 0$ برحسب $\alpha_f = q + ip$ برای پتانسیل پوشل-تلر.

در شکل ۲ و ۳ تابع ویگنر مد a_f در خروجی تداخل‌سنج ماخ-زندر وقتی که یک حالت عددی با $m = 2$ و یک حالت همدوس غیرخطی(حالت همدوس غیرخطی پنسون-سولومون در شکل ۲ و حالت همدوس متناظر با پتانشیل پوشل-تلر در شکل ۳) به عنوان ورودی به تداخل‌سنج وارد می شوند، نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در هردو شکل در برخی نقاط تابع ویگنر منفی است که نشان می‌دهد میدان خروجی غیرکلاسیکی است. این در حالی است که اگر تداخل کوانتومی بین یک حالت عددی و یک حالت همدوس استاندارد ($f(n) = 1$) را در نظر بگیریم تابع ویگنر آن همانطور که در شکل ۴ دیده می شود در تمام نقاط مثبت است. بنابراین در تداخل کوانتومی یک حالت همدوس غیرخطی و یک حالت عددی حتی به ازای $\phi = 0$ میدان خروجی کاملا کوانتومی بوده و می‌توان از آن در ارتباطات کوانتومی یا رمزنگاری کوانتومی استفاده کرد.



شکل۴: تابع ویگنر خروجی مد a_f با ورودی $n_c = 2(\phi_c = 0)$ و $m = 2$ با فاز $\phi = 0$ برحسب $\alpha_f = q + ip$ برای حالت همدوس استاندارد $f(n) = 1$.

مراجع

[1] A. Ourjoumtsev, M-C. Dheur, T. Avignon and L. Jacubwies, “Two-photon quantum interference for an undergraduate lab”, Eur. J. Phys., Vol. 36, pp. 065034-065040, 2015.

[2] A. Windehager , M. Suda , C. Pacher , C. Peev , A. Poppe, “Quantum interference between a single-photon Fock state and a coherent state”, Opt. Commun., Vol. 284, pp., 1907-1912, 2011.

[3] A. I. Lvovsky, S. Babichev, “Synthesis and tomographic characterization of the displaced Fock state of light”, Phys. Rev. A, Vol. 66, pp. 011801, 2002

[4] X.-X. Xu, F. Jia, L.-Y. Hu, Z.-L. Duan, Q. Guo and S.-J. Ma, “Quantum interference between an arbitrary-photon Fock state and a coherent state”, J. Mod. Opt., Vol. 59, pp. 1624-1633, 2012.

[5] R. L. de Matos Filho and W. Vogel, “Nonlinear coherent states”, Phys. Rev. A, Vol. 54, pp. 4560-4563, 1996.

[6] V. I. Manko, G. Marmo, E. C. G Sudarshan and F. Zaccaria, “f-oscillators and nonlinear coherent states”, Phys. Scr., Vol. 55, pp. 528-541, 1997.

[7] M. Ernst, *The Principles of Physical Optics*; Dover: New York, 2003.

[8] E. Wigner, “On the Quantum correction for thermodinamic equilibrium”, Phys. Rev., Vol. 40, pp. 749-759, 1932.

[9] K. A. Penson, A. I. Solomon, "New generalized coherent States", J. Maths. Phys. Vol. 40, pp. 2354, 1999.

[10] J. P. Antoine, J- P. Gaazeau, J. R. Klauder, P. Monceau, K. A. Penson., J. Math. Phys. Vol. 42, pp. 2349, 2001.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]