بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

ناپایداری ریلی تیلور در حضور اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی

زمندی، فاطمه[۱]؛ مومنی ، مهدی[۱]

[۱]دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود ، ،شاهرود

چکیده

در این مقاله ناپایداری ریلی-تیلور در یک پلاسمای کوانتومی مغناطیده , با رسا نندگی بالا مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از معادلات مگنتو هیدرودینامیک کوانتومی و با فرض متخلخل بودن محیط و همچنین با استفاده از شرایط مرزی مناسب روابط پاشندگی بدست آمده است. منحنی نرخ رشد ناپایداری به ازاء مقادیر مختلف پارامتر کوانتومی و میدان مغناطیسی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان می دهد که با افزایش پارامتر کوانتومی و همچنین میدان مغناطیسی نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور کاهش می‌یابد.

Rayleigh–Taylor instability in the presence of quantum effect and magnetic field

Momeni, Mahdi[1]; Zamandi, Fatemeh[1]

[1] Department of Physics, University of Shahrood, Shahrood,

Abstract

In this paper Rayleigh–Taylor instability in a quantum magnetized plasma with highly conducting has been investigated. Using quantum magnetohydrodynamics equations and assuming the porous media and also with appropriate boundary conditions the dispersion relation is obtained. The curve instability growth rate in term of varying amounts of quantum parameter and magnetic field has been shown. The result shows that increasing in quantum parameter and magnetic field lead to decreasing of the instability.

PACS No.A-10-1045-1

مقدمه

ناپایداری هیدرودینامیکی ریلی-تیلور یک ناپایداری ماکروسکوپیک مهم است که هنگامی که یک سیال سنگین در حضور میدان گرانشی توسط یک سیال سبک نگه داشته می‌شود، رخ می‌دهد. ناپایداری ریلی-تیلور در پدیده های نجوم و اختر فیزیک به عنوان مثال، در کرونا(قوس خورشیدی)، انفجار درونی ابرنو اختر ها، سحابی خرچنگ و.. اهمیت ویزه دارد. این ناپایدری همچنین نقش مهمی در همجوشی محصور شدگی لختی (ICF)و لیزر پلاسما ایفا می‌کند. تاکنون تاثیر موضوعات متنوعی از جمله اثرات حرکتی ویسکوزیته و مقاومت مغناطیسی ، تخلخل ونفوذ پذیری و... روی ناپایداری ریلی-تیلور مطالعه شده است[۵]-[۹].

دانشمندان مسئله ریلی-تیلور در مگنتو هیدرودینامیک MHD با رسانایی محدود را بررسی کرده و دریافته اند که رسانایی محدود راه حل های جدید و غیرمنتظره معرفی می-کند[۶]. همچنین پدیده‌ی اثرات میدان الکتریکی مماسی روی ناپایداری ریلی-تیلور بررسی شد و نقش تغییرناپذیر این میدان مشخص گردید[۷].

مطالعه‌ی پلاسماهای کوانتومی توجهات زیادی را در دهه‌های اخیر بخاطر کاربرد های قابل توجهی از علوم نانو و اختر فیزیک به خود جلب کرده است، در پلاسما های کوانتومی، اثرات برخوردی منجر به ناپایداری‌های پلاسما، نوسان‌ها و امواج می‌شود. یک مدل ساده‌ی ریاضی که برای مطالعه‌ی دینامیک پلاسما های چگال در دامنه های اختر فیزیکی یافت می‌شود، مدل سیالات MHD می‌باشد، که بطور گسترده برای بحث انتشار امواج در پلاسماهای سرد یا داغ استفاده

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

می‌شود. اثرات کوانتومی درسیستم‌های با چگالی بالا و دمای پایین هنگامی که طول موج دوبروی ذرات باردار بزرگتر یا مساوی طول مشخصه‌ی این ذرات باشد، بوجود می‌آیند. مدل هیدرودینامیک کوانتومی به منظور توصیف انتقال ذرات باردار اختراع شد[۹]. و شرایط ایده آلی برای تعادل MHD ایجاد کرد.

در این مقاله به مطالعه ترکیب اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه ای متخلخل پرداخته شده است.

مدل ریاضی

فرض می‌کنیم یک پلاسمای تراکم ناپذیر، سیال لایه ای با عمق h که بوسیله دو صفحه $z=h$ و $z=0$ مرزبندی شده، داریم که در صفحه افقی جهت های (x,y) هیچ مرز مشخصی ندارد. سیال به عنوان رسانای نامحدود، چسبنده و متخلخل در نظر گرفته شده است. سیال در یک میدان مغناطیسی متغیر $B(B_x(z),0,0)$ و میدان گرانشی $g(0,0,-g)$ جاسازی شده است. در اینجا معادلات اساسی کوانتوم هیدرودینامیکی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla P + \rho g - \frac{\mu}{k_1}U + Q + \frac{(\nabla\times B)\times B}{\mu_0} \quad (۱)$$

$$\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho U) = 0 \quad (۲)$$

$$\nabla.U = 0 \quad (۳)$$

$$\varepsilon\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(U\times B) \quad (۴)$$

که در آن ε و k_1, μ, p, U, ρ به ترتیب نشان دهنده‌ی چگالی سیال ، سرعت سیال، فشار، ویسکوزیته(چسبندگی)، تخلخل و نفوذپذیری می‌باشند. $Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i}\rho\nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right)$ فشار کوانتومی است که به عنوان پتانسیل بوهم شناخته می‌شود، که در آن $\hbar$ ثابت پلانک، m_e جرم الکترون و m_i جرم یون می‌باشند. اختلال مرتبه‌ی اول از معادله بالا بوسیله روش حالت معمولی را، با فرض اینکه همه‌ی کمیت های فیزیکی ترکیبی از بخش های تعادلی و اختلالی هستند، بدست می‌آوریم. معادلات (۱)-(۴) را به فرم خطی‌اش می‌نویسیم:

$$\varepsilon\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla.(\rho_0 U_1) = 0 \quad (۵)$$

$$\nabla.U_1 = 0 \quad (۶)$$

$$\varepsilon\frac{\partial B_1}{\partial t} = (B_0.\nabla)U_1 - (U_1.\nabla)B_0 \quad (۷)$$

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\nabla(\nabla^2\rho_1) - \frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 \\ -\frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_1 + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 \\ -\frac{1}{2\rho_0}\nabla(\nabla\rho_0.\nabla\rho_1) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_0)^2 + \\ \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_1(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{\rho_0^2}\nabla\rho_0(\nabla\rho_0.\nabla\rho_1) \\ -\frac{\rho_1}{\rho_0^3}(\nabla\rho_0)^3 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

با فرض اینکه همه‌ی کمیت های اختلالی در فضای (x,y,z) و زمان t به صورت زیر تغییر می‌کنند.

$$f_1(x,y,z,t) = f_1(z)\exp(ik_x x + ik_y y + i\omega t) \quad (۹)$$

که در آن k_x و k_y به ترتیب نشان دهنده‌ی اعداد موج در جهت های x و y بوده و $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ عدد موج اختلالی است، در حالیکه $\omega(\omega = \sigma_r + i\sigma)$ فرکانس اختلالات هارمونیک می‌باشد.

با استفاده از اختلال تعریف شده بوسیله‌ی معادله (۵) و جایگذاری آن در معادله های خطی شده‌ی بالا، معادلات مولفه‌ای آنها را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

(۱۰)

$$\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\left(-i\omega + \frac{\mu}{k_1}\right)u_x = -ik_x P_1 + \bar{Q}_x + \frac{B_{1z}}{\mu_0}\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}\right)$$

(۱۱)

$$\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}(-i\omega + \frac{\mu}{k_1})u_y = -ik_y P_1 + \bar{Q}_y + \frac{B_{0x}(z)\left(ik_x B_{1y} - ik_y B_{1x}\right)}{\mu_0}\right)$$

(۱۲)

$$\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}(-i\omega + \frac{\mu}{k_1})u_z = -\frac{\partial}{\partial z}P_1 + \bar{Q}_z - \rho_1 g + \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1z} - \frac{\partial}{\partial z}B_{1x})}{\mu_0} - \frac{B_{1x}}{\mu_0}\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}\right)$$

$$-\varepsilon i\omega\rho_1 + u_z\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad (۱۳)$$

$$ik_x u_x + ik_y u_y + i\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (۱۴)$$

(۱۵)

$$\left(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}\right) = \left(-\frac{\left(B_{0x}(z)ik_x U_x - U_z\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}\right)}{i\omega\varepsilon}, \frac{[B_{0x}(z)ik_x u_y]}{i\omega\varepsilon}, \frac{[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega\varepsilon}\right)$$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

$$\bar{Q}_x = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e}\frac{k_x}{\varepsilon\omega}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{2}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left\{\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}-\frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^2\right\}\frac{\partial u_z}{\partial z}\\ +\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\frac{\partial^3\rho_0}{\partial z^3}-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}\right)\\ -\frac{k^2}{2}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}+\frac{1}{2{\rho_0}^2}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^3\end{array}\right\}u_z\end{array}\right] \quad (16)$$

$$\bar{Q}_y = \frac{k_y}{k_x}\bar{Q}_{x1} \quad (17)$$

$$\bar{Q}_z = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e}\frac{1}{i\varepsilon\omega}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}+\\ \left\{\frac{3}{2}\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\\ \left\{\begin{array}{c}\frac{3}{2}\frac{\partial^3\rho_0}{\partial z^3}-\frac{3}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}-\\ \frac{k^2}{2}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}+\frac{3}{2\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^3\end{array}\right\}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\\ \left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\frac{\partial^4\rho_0}{\partial z^4}-\\ \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)\frac{\partial^3\rho_0}{\partial z^3}-\\ \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}\right)^2\\ +\frac{5}{2{\rho_0}^2}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\rho_0}{\partial z^2}\\ +\frac{k^2}{2\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{\rho_0^3}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)^4\end{array}\right\}u_z\end{array}\right] \quad (18)$$

برای استخراج مولفه‌ی z سرعت، ik_y،ik_x را به ترتیب در معادله‌های (۶) و (۷) ضرب کرده وسپس آنهارا با هم جمع می‌کنیم و با استفاده از معادله‌ی (۸) بدست می‌آوریم:

$$\left(\begin{array}{c}\left(\rho_0\omega^* + k^2A - \frac{{B_{0x}}^2(z)\,{k_x}^2}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\\ \left[\omega^*\frac{\partial\rho_0}{\partial z}+k^2B-\frac{2B_{0x}(z)\,{k_x}^2}{\mu_0}\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}\right]\frac{\partial u_z}{\partial z}\\ -\left[\rho_0\omega^*k^2-\frac{{B_{0x}}^2(z)\,{k_x}^2}{\mu_0}-(C-g)k^2\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right]u_z=0\end{array}\right) \quad (19)$$

$$A = -\frac{\hbar^2}{4m_i m_e}\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2 \quad (20)$$

(21)

$$B = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e}\frac{1}{{\rho_0}^2}\frac{d\rho_0}{dz}\left\{\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2 - 2\rho_0\frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right\}$$

(22)

$$C = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e}\frac{k^2}{\rho_0}\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right) \quad (23)$$

$$\omega^* = i\omega\left(-i\omega+\frac{\mu}{k_1}\right)$$

۳-رابطه پاشندگی پلاسمای لایه‌ای

حال فرض می‌کنیم پلاسمای لایه ای با ضخامت محدود بوسیله دو مرزسخت از $z=0$ تا $z=h$ مرز بندی شده است. ما همچنین فرض کرده ایم که چگالی و میدان مغناطیسی به صورت نمایی به zوابسته اند. بنابراین، چگالی و توزیع میدان مغناطیسی به ترتیب بدین صورت داده می‌شوند:

(24)

$$\rho_0(z) = \rho_0\exp\left({}^{z}/_{L_D}\right);\ B_{0x}(z) = B_{0x}(z)\exp({}^{z}/_{2L_D})$$

که L_D مقیاس ارتفاع چگالی است. جواب عمومی معادله (۱۹) با استفاده از شرایط مرزی $u_z=0$ در $z=0$ و $z=h$ را اینطور حدس می‌زنیم:

$$u_z = u_0\sin(\tfrac{n\pi z}{h})\exp(\lambda z) \quad (25)$$

در اینجا n یک عدد صحیح و $\lambda = (-\frac{1}{2L_D})$ می‌باشند. معادله‌ی (۱۹) با کمک معادله‌ی (۲۴) و (۲۵) حل شده و مقادیر زیر را نتیجه می‌دهد:

(26)

$$\omega^* = \omega_q^2k^2 + {k_x}^2v_A^2 - \left[\frac{4gk^2h^2L_D}{h^2+4n^2\pi^2{L_D}^2+4h^2k^2{L_D}^2}\right]$$

که $\omega_q^2 = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e {L_D}^2}$ اثرات کوانتومی را توصیف می‌کند و $v_A^2 = \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0\rho_0}$ با عنوان سرعت آلفونی شناخته می‌شود. معادله‌ی (۲۶) رابطه‌ی پاشندگی ناپایداری ریلی-تیلور در پلاسمای مغناطیده کوانتومی را نشان می‌دهد. رابطه‌ی پاشندگی ترکیبی از اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی پلاسمای لایه‌ای را در خود دارد.

ترکیب اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی در محیط متخلخل

برای راحتی در انجام عملیات ریاضی، رابطه‌ی پاشندگی عمومی برای ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه ای در حضور کوانتوم ومیدان مغناطیسی در محیط متخلخل می‌تواند بااستفاده از $\omega = i\sigma$ و $k_x = k\cos\theta$ نوشته شود که θ انحراف بردار موج k از میدان مغناطیسی H است، مانند:

(27)

$$\sigma^2 + \sigma\left(\frac{\varepsilon v}{k_1}\right) + \omega_q^2k^2 + {k_x}^2v_A^2 - \frac{4gk^2h^2l_D}{h^2+4n^2\pi^2{l_D}^2+4h^2k^2{l_D}^2} = 0$$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]

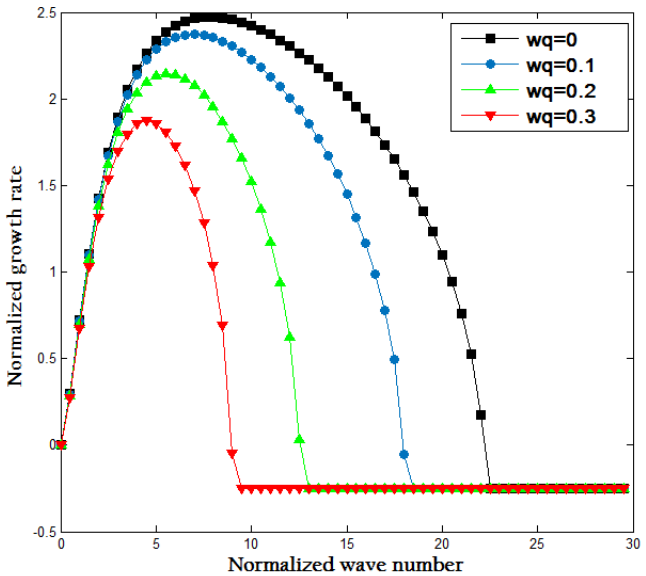
نـرخ رشـد بـرای ایـن سـاختار بصـورت زیـر بدسـت می‌آید:

$$\sigma = -\frac{\varepsilon v}{k_1} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon v}{k_1}\right)^2 + 4\left\{\frac{4gk^2h^2l_D}{h^2 + 4n^2\pi^2{l_D}^2 + 4h^2k^2{l_D}^2} - \omega_q^2k^2 - {k_x}^2v_A^2kcos\theta\right\}} \quad (۲۸)$$

به منظور مشاهده‌ی تاثیر پارامترهای میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی روی نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای، معادله‌ی (۲۸) بصورت عددی حل شده و نتایج در شکل ۱و۲ نمایش داده شده‌اند. شکل ها را بین نرخ رشد (σ) و عدد موج (k) برای مقدار های متفاوتی از اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی رسم کردیم. در شکل ۱ با جایگزین کردن پار امترهای

$$g^* = 10, \omega_q^* = 0.1,0.2,0.3 \ , k_1 = 0.1 \ , v^* = 0.5$$
$$, V_A^* = 0.2 \ , \theta = 45^0, \varepsilon = 0.1 h^* = 1, n = 1$$

نشان داده ایـم کـه نـرخ رشـد بـا افـزایش مقـادیری ازاثـرات کوانتومی، کاهش می‌یابد وایـن نشـان دهنـده‌ی اینسـت کـه اثرات کوانتومی باعث پایداری بیشتر سیستم ریلی-تیلـور مـی شود.

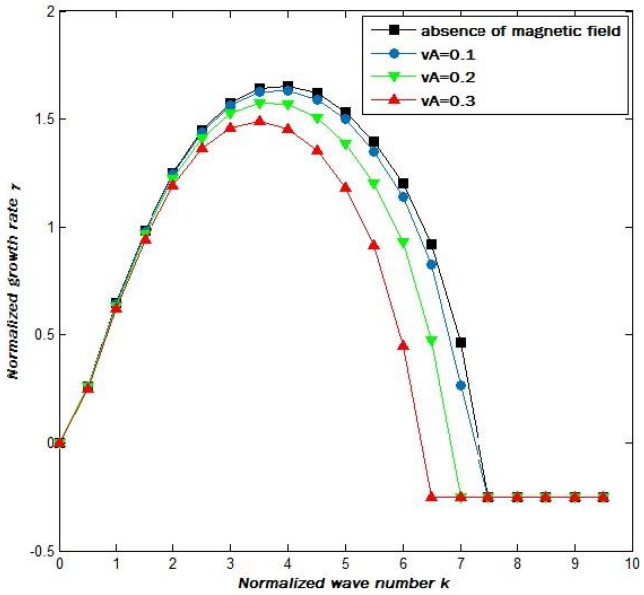


شکل۱. نرخ رشد در مقایسه با عدد موج برای مقدارهای متفـاوتی از اثـرات کوانتومی

بطـــــــــــــــــــــــــــــــور مشـــــــــــــــــــــــــــــــابه مقادیر $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, V_A^* = 0.1,0.2,0.3$

$$k_1 = 0.1 \ , v^* = 0.5 \ , \varepsilon = 0.1 \ , \theta = 45^0, \omega_q^* = 0.4$$

را در معادله‌ی (۲۸) جایگذاری کردیم و نتایج نشان داده شده در شکل ۲ بدست آمد. با توجه به این شکل ما دریافتیم که نرخ رشد باافزایش مقدار میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد بنابراین میدان مغناطیسی نیز باعث کاهش ناپایداری ریلی-تیلور می گردد.



شکل۲. نرخ رشد در مقایسه با عدد موج برای مقدارهای متفاوتی از میدان مغناطیسی

نتیجه گیری

در این مقاله، اثرات میدان همراه با فشار کوانتومی روی ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای در یک محیط متخلخل را بررسی کرده‌ایم. رابطه‌ی پاشندگی برای سیستم توسط حل کوانتومی معادلات MHD بدست آمد. روابط پاشندگی در حالتهای مختلف بحث شد و مشخص شد که سیستم پایداری اش را در حضور اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی بدست می‌آورد. محاسبات عددی روی نرخ رشد ریلی-تیلور نشان می‌دهد که اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی حالت ناپایدار، بی ثباتی ریلی-تیلور تاثیرات پایا دارند. بنابراین، ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای در حضور اثرات کوانتومی همراه با میدان مغناطیسی در محیط متخلخل پایا است.

مرجع‌ها

[1] L Rayleigh Proc. of London Math. Soc. 14 170 (1882).
[2] G I Taylor Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 201 192 (1950).
[3] S Chandrasekhar Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford: Clarendon press) (1961).
[4] H Alfven on the Origin of the Solar System (Oxford: Clarendon Press) (1954).
[5] P H Roberts Astrophys. J. 137 679 (1963).
[6] J D Jukes J. Fluid Mech. 16 177 (1963).
[7] N T Eldabe J. Phys. Soc. Japan 5 115 (1989).
[8] J Cao, H Ren, Z Wu and P K Chu Phys. Plasmas 15 01
[9] F Hass Phys. Plasmas 12 062117 (2005).

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-10-31]