بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر

فرشید جهان‌بخش، غلامرضا هنرآسا
دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده- در این مقاله ابتدا حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته‌ی فوتون‌افزده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر معرفی شده و تابع ویگنر تعداد- فاز حالت‌های معرفی‌شده مورد بحث قرار گرفته است. سپس ویژگی‌های فازی این حالت‌ها با استفاده از روش پگ- بارنت و همچنین چلاندگی تعداد- فاز آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

کلید واژه: حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده، نوسانگر ناهماهنگ، تابع توزیع فاز، چلاندگی

Phase Properties of Photon Added Coherent States for Nonharmonic Oscillators in a Nonlinear Kerr Medium

F. Jahanbakhsh, G. Honarasa
Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Abstract- In this paper, the photon added coherent states for nonharmonic oscillators in a nonlinear Kerr medium are introduced and the number- phase Winger function of the introduced states are discussed. Then, the phase properties of these states are investigated by using Pegg-Barnett formalism and also their number-phase squeezing is studied.

Keywords: Photon Added Coherent States, Nonharmonic Oscillators, Phase Distribution Function, Squeezing.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

۱- مقدمه

حالت‌های همدوس ابتدا توسط شرودینگر در زمینه‌ی نوسانگرهای هماهنگ معرفی شدند [۱]. حالت‌های همدوس مربوط به نوسانگرهای هماهنگ غیرخطی برای میدان‌های بوزونی ساخته و بررسی شدند که پخش نور لیزر در یک محیط غیرخطی کر با استفاده از جبر هایزنبرگ تعمیم‌یافته را نمایش می‌دهند [۲]. در این مقاله ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ را بررسی خواهیم کرد.

۲- حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته‌ی فوتون‌افزوده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در محیط غیرخطی کر

هامیلتونی مربوط به نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر است[۲]:

$$H = \omega a^{\dagger}a + \chi (a^{\dagger})^2 a^2 \qquad (۱)$$

که در آن a و $a^{\dagger}$ عملگرهای نابودی و خلق هستند. در اینجا χ ،ثابت جفت‌شدگی است که با پذیرفتاری غیرخطی مرتبه ۳ محیط کر $\chi^{(3)}$ ارتباط دارد. برای معادله ویژه مقداری هامیلتونی داریم:

$$\hat{H}\,|n\rangle = E_{n,\mu}\,|n\rangle \qquad n \geq 0 \qquad (۲)$$

که $\mu = \frac{\omega - \chi}{\chi}$ و $E_{n,\mu} = \chi(n^2 + \mu n)$, است. اثر عملگر خلق جبر هایزنبرگ تعمیم یافته $A^{\dagger}$ به صورت زیر است.

$$A^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{(n+1)^2 + \mu(n+1)}\,|n+1\rangle \qquad (۳)$$

حالت‌های همدوس مربوط به نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$|z\rangle = N(|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{g(n)}}|n\rangle \qquad (۴)$$

که درآن $N(|z|^2)$ ثابت بهنجارش و

$$g(n) = \prod_{i=1}^{n}(i^2 + \mu i) = \frac{n!(n+\mu)!}{\mu!}, g(0) = 1 \qquad (۵)$$

است. مشخص است این حالت ها وقتی $\chi \to 0$ یا $g(n) \to n!$،تبدیل به حالت همدوس (نوسانگر هماهنگ) می‌شوند. در حالت حدی یا به عبارتی با تعریف حالت‌های فوتون‌افزوده به شکل زیر

$$|z,m\rangle = (A^{\dagger})^m\,|z\rangle \qquad (۶)$$

و استفاده از

$$(A^{\dagger})^m\,|n\rangle = \sqrt{\frac{(n+m)!(n+m+\mu)!}{n!(n+\mu)!}}\,|n+m\rangle \qquad (۷)$$

برای حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$|z,m\rangle = N_m(|z|^2) \times \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{\left(n!(n+\mu)!\right)^2}}z^n\,|n+m\rangle \qquad (۸)$$

که با اضافه کردن m فوتون به یک نوسانگر ناهماهنگ مرسوم به‌دست می‌آیند. در رابطه‌ی (۸) $N_m(|z|^2)$ ثابت بهنجارش است و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$N_m(|z|^2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{\left(n!(n+\mu)!\right)^2}|z|^{2n}\right)^{\frac{-1}{2}} \qquad (۹)$$

۳- ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی معرفی‌شده

در این بخش به بررسی ویژگی‌های فازی حالت‌های معرفی‌شده خواهیم پرداخت.

۳-۱- تابع توزیع ویگنر تعداد- فاز

تابع توزیع ویگنر، آمار کوانتومی تعداد فوتون‌ها و فاز یک میدان تک‌مد را توصیف می‌کند. منفی‌شدن این تابع توزیع در فضای فاز می‌تواند طبیعت غیرکلاسیکی حالت‌ها را نمایش دهد. عملگر ویگنر تعداد- فاز به این صورت بیان می‌شود [۳و ۴]:

$$w_{np}(n,\theta) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{p=-n}^{n}e^{2ip\theta}\,|n+p\rangle\langle n-p| + \sum_{p=-n}^{n-1}e^{i(2p+1)\theta}\,|n+p\rangle\langle n-p-1|\right\} \qquad (۱۰)$$

که در آن $n = 0,1,2,3,...$ و θ حقیقی است.

بنابراین برای حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ داریم:

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

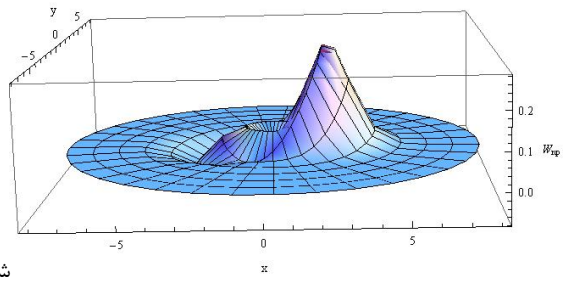
[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

$$W_{np}(n,\theta)=\langle z,m|w_{np}|z,m\rangle \qquad (۱۱)$$

به کمک رابطه‌ی (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}W_{np}=&\frac{N_m^2(|z|^2)}{2\pi}\\&\times\Bigg\{\Bigg(\sum_{p=-n}^{n}\sqrt{\frac{\mu!(n-p)!(n-p+\mu)!}{\left((n-p-m)!(n-p-m+\mu)!\right)^2}}\\&\times\sqrt{\frac{\mu!(n+p)!(n+p+\mu)!}{\left((n+p-m)!(n+p-m+\mu)!\right)^2}}\\&\times e^{2ip\theta}(z^*)^{n+p-m}z^{n-p-m}\Bigg)\\&+\Bigg(\sum_{p=-n}^{n-1}\sqrt{\frac{\mu!(n-p-1)!(n-p+\mu-1)!}{\left((n-p-m-1)!(n-p-m+\mu-1)!\right)^2}}\\&\times\sqrt{\frac{\mu!(n+p)!(n+p+\mu)!}{\left((n+p-m)!(n+p-m+\mu)!\right)^2}}\\&\times e^{i(2p+1)\theta}(z^*)^{n+p-m}z^{n-p-m-1}\Bigg)\Bigg\}\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

در شکل ۱ تابع توزیع ویگنر به ازای $\mu=1$ و $z=1$ بر حسب دو متغیر جدید $x=n\cos\theta$ و $y=n\sin\theta$ (مرسوم است تابع ویگنر به جای بر حسب n و θ برحسب x و y رسم شود) رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تابع ویگنر در $n=3$ منفی شده است که نشان‌دهنده‌ی رفتار غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی‌شده است.



شکل ۱: تابع توزیع ویگنر تعداد- فاز حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگر ناهماهنگ به ازای $m=1$.

۳-۲- تابع توزیع فاز پگ- بارنت

بر اساس رهیافت پگ- بارنت یک مجموعه‌ی کامل از $s+1$ حالت فاز متعامد $|\theta_{\rm P}\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$|\theta_{\rm P}\rangle=\frac{1}{\sqrt{s+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(in\theta_{\rm P})||n\rangle \qquad (۱۳)$$

که در آن $\{|n\rangle\}_{n=0}^{s}$ حالت‌های عددی هستند و $\theta_{\rm P}$ شامل همه‌ی مقادیر حقیقی است. تنها حالت‌هایی با مقادیر θ متعامدند که به اندازه‌ی ضریبی از $2\pi/s+1$ با یکدیگر فاصله داشته باشند، از این رو:

$$\theta_{\rm P}=\theta_0+\frac{2\pi{\rm P}}{s+1}\qquad {\rm P}=0,1,\ldots,{\rm s} \qquad (۱۴)$$

که در آن θ_0 می‌تواند هر مقدار اختیاری باشد. عملگر فاز هرمیتی را براساس حالت‌های فاز تعریف‌شده می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\phi_\theta=\sum_{\rm P=0}^{s}\theta_{\rm P}|\theta_{\rm P}\rangle\langle\theta_{\rm P}| \qquad (۱۵)$$

تابع توزیع فاز پگ- بارنت، برای حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$${\rm P}(\theta)=\lim_{s\to\infty}\frac{s+1}{2\pi}\,|\langle\theta_k|z,m\rangle|^2 \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸) و (۱۳) خواهیم داشت:

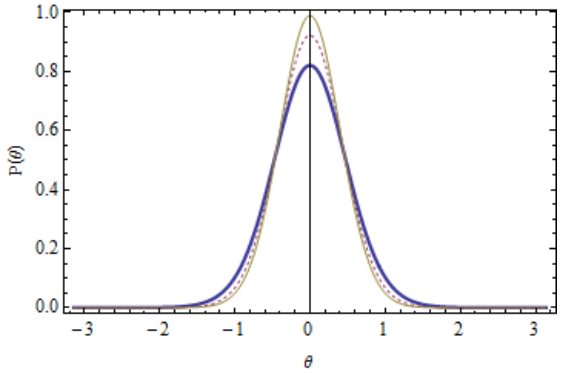
$$\begin{aligned}{\rm P}(\theta)=&\frac{N_m(|z|^2)}{2\pi}\\&\times\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{(n!(n+\mu)!)^2}}\,{\rm e}^{-i(n+m)\theta_k}\,z^n\right|^2\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

درنهایت با جداگانه‌نوشتن جملات مربوط به $n=l$ و $n\neq l$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}{\rm P}(\theta)=&\frac{1}{2\pi}\Bigg\{1+2N_m^2(|z|^2)\\&\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sqrt{\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{\left(n!(n+\mu)!\right)^2}}\\&\times\sqrt{\frac{\mu!(l+m)!(l+m+\mu)!}{\left(l!(l+\mu)!\right)^2}}\\&\times z^n z*^l\cos[(n-l)\theta]\Bigg\}\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]



شکل ۲: تابع توزیع فاز پگ- بارنت حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگر ناهماهنگ برحسب θ به ازای $m=2$ (خط توپر ضخیم)، $m=5$ (خط‌چین) و $m=8$ (خط توپر باریک).

تابع توزیع فاز پگ- بارنت حالت‌های معرفی‌شده به ازای $\mu=2$ در شکل ۲ رسم شده است، همانطور که مشاهده می‌شود هر چه m بزرگتر باشد قله‌ی نمودار بلندتر و تیزتر می‌شود که به معنی جایگزیده‌تر شدن حالتهای معرفی شده نسبت به θ است.

۳-۳- چلاندگی تعداد- فاز

رابطه‌ی عدم‌قطعیت برای عملگرهای N و ϕ_θ به‌صورت

$$\left\langle(\Delta\phi_\theta)^2\right\rangle\left\langle(\Delta N)^2\right\rangle\geq\frac{1}{4}\left|\left\langle[N,\phi_\theta]\right\rangle\right|^2 \qquad (۱۹)$$

است که درآن [۵]:

$$[N,\phi_\theta]=i[1-2\pi\mathrm{P}(\theta_0)] \qquad (۲۰)$$

اگر $\left\langle(\Delta\phi_\theta)^2\right\rangle<\frac{1}{2}\left|\left\langle[N,\phi_\theta]\right\rangle\right|$ یا $\left\langle(\Delta N)^2\right\rangle<\frac{1}{2}\left|\left\langle[N,\phi_\theta]\right\rangle\right|$ شود. به ترتیب چلاندگی در عملگر تعداد یا فاز اتفاق می‌افتد. برای بررسی چلاندگی در عملگرهای فاز و تعداد، پارامترهای چلاندگی زیر تعریف می‌شوند:

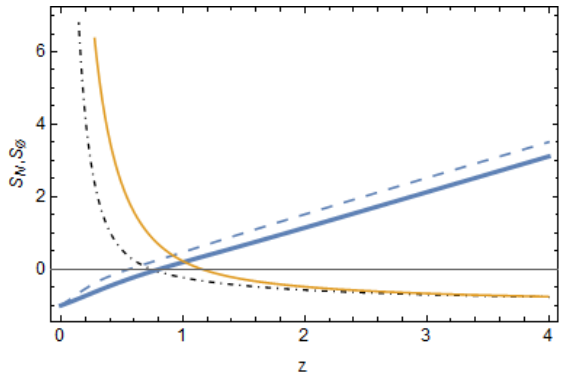
$$S_N=\frac{2\left\langle(\Delta N)^2\right\rangle}{\left|\left\langle[N,\phi_\theta]\right\rangle\right|}-1 \qquad (۲۱)$$

$$S_\phi=\frac{2\left\langle(\Delta\phi_\theta)^2\right\rangle}{\left|\left\langle[N,\phi_\theta]\right\rangle\right|}-1 \qquad (۲۲)$$

که در آن داریم:

$$\left\langle(\Delta\phi_\theta)^2\right\rangle=\int\theta^2\mathrm{P}(\theta)d\theta-\left(\int\theta\mathrm{P}(\theta)d\theta\right)^2 \qquad (۲۳)$$

اگر $S_N<0$ ($S_\phi<0$) باشد چلاندگی در عملگر تعداد (فاز) رخ می‌دهد. چلاندگی تعداد- فاز این حالت‌ها را به ازای $\mu=1$ برای دو m مختلف در شکل ۳ رسم کرده‌ایم که برای $m=1$ به ازای $z\lesssim0.802$ چلاندگی در عملگر تعداد رخ می‌دهد، به ازای $0.802\lesssim z\lesssim1.177$ هیچ چلاندگی در عملگرهای تعداد و فاز دیده نمی‌شود. امابرای zهای بیشتر از 1.177 ، $S\phi$ منفی می‌شود و چلاندگی در عملگر فاز دیده می‌شود. درحالیکه برای $m=3$ فقط در بازه $0.556\lesssim z\lesssim0.744$ چلاندگی نداریم. در بقیه نقاط بازه چلاندگی در یکی از مولفه‌ها وجود دارد.



شکل ۳: چلاندگی تعداد- فاز حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگر ناهماهنگ برحسب z به ازای $m=1$ { S_N (خط توپرضخیم)، S_ϕ (خط توپر باریک)}و $m=3$ { S_N (خط‌چین)، S_ϕ (نقطه خط‌چین)}

نتیجه گیری

تابع ویگنر در بعضی نقاط منفی شده که نشان‌دهنده‌ی رفتار غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی‌شده است. همچنین برای تابع توزیع فاز پگ- بارنت هرچه مقدار m بیشتر باشد قله نمودار بلندتر و تیزتر می‌شود و برای چلاندگی تعداد-فاز نیز می‌توان گفت پارامترهای چلاندگی دارای رفتار معکوس هستند با افزایش یکی از پارامترها دیگری کاهش می‌یابد به صورتی که صحت رابطه عدم قطعیت محفوظ بماند.

مراجع

[1] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik," *Naturwissenschaften*, vol. 14, pp. 664-666, 1926.

[2] M. Al-Rajhi, "Photon added coherent states for nonharmonic oscillators in a nonlinear Kerr medium," *Modern Physics Letters B* ,vol. 29, p. 1550035, 2015.

[3] J. Vaccaro, "Number-phase Wigner function on Fock space," *Physical Review A*, vol. 52, p. 3474, 1995.

[4] J. A. Vaccaro, "New Wigner function for number and phase," *Optics communications*, vol. 113, pp. 421-426, 1995.

[5] D. Pegg and S. Barnett, "Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field," *Physical Review A*, vol. 39, p. 1665, 1989.

[6] B. Roy and P. Roy, "Phase distribution of nonlinear coherent states," *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 1, p. 341, 1999.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]