بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۴-۱۲ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

بررسی تحلیلی و شبیه‌سازی پراش فرانهوفر پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی لاگر-گوسی

مهدی خدادادی کرهرودی، بهمن پرمون، ابوالحسن مبشری و حسین ثقفی‌فر

شاهین‌شهر- دانشگاه صنعتی مالک اشتر- مجتمع علوم کاربردی-پژوهشکده‌ی علوم و فناوری لیزر

چکیده - در این مقاله پراش فرانهوفر پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی لاگر-گوسی بررسی شده است. برای این منظور ابتدا با استفاده از انتگرال پراش فرانهوفر، عبارت ریاضی توصیف کننده پراش پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی لاگر-گوسی به دست آمده است. نتایج حاصل از حل تحلیلی این انتگرال نشان دهنده حضور پرتوهای گردابی با بارهای توپولوژیکی مختلف در مراتب پراش است. شبیه‌سازی پراش پرتوهای بسل-گوسی با بار توپولوژیکی مختلف l از توری‌های چنگالی با بار توپولوژیکی p نیز شکل‌گیری نوع جدیدی از پیچه‌های نوری به نام پیچه‌های نوری کامل را در مراتب پراش ثابت می‌کند. طرح تداخلی پیچه‌های نوری کامل تولید شده با یک موج گوسی صحت رابطه‌ی تحلیلی را در تعیین بارهای توپولوژیکی نشان می‌دهد. نتیجه جالب توجه در بررسی‌ها عدم وابستگی بار توپولوژیکی پیچه‌ی نوری کامل به سایز پیچه و مرتبه پراش است.

کلید واژه- بار توپولوژیکی، پراش، پرتوی بسل-گوسی، پیچه‌ی نوری کامل.

Analytical investigation and simulation of Fraunhofer diffraction of Bessel-Gaussian beam by Laguerre-Gaussian forked grating

Mahdi Khodadadi Karahroudi[1], Bahman Parmoon[1], Abolhasan Mobashery[1], and Hossien Saghafifar[1]

[1]Optics and laser science and technology research center, University of Maleke-ashtar, Shahin-shahr, Isfahan

Abstract- In this paper Fraunhofer diffraction of Bessel-Gaussian (BG) beam by Laguerre-Gaussian (LG) forked grating was investigated. For this purpose, at first a mathematical expression that describes the BG beam diffraction by LG forked grating is obtained by using Fraunhofer diffraction integral. The results of the analytical solution of the integral indicating the presence of vortex beams with different topological charges in diffraction orders. Simulation of diffraction of various BG beams with different topological charges (l) by forked grating with topological charge (p), also shows formation of a new kind of optical vortices in diffraction orders which known as Perfect Optical Vortex (POV). Interference pattern of a POV and a Gaussian beam demonstrates validity of analytical expression to determine topological charges. One of the notable results that have been achieved in this study is that the topological charge of POV is not dependent upon the size of vortex and order of diffraction.

Keywords: Topological charge, Diffraction, Bessel-Gaussian beam, Perfect Optical vortex.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

۱- مقدمه

پیچه‌های نوری کامل نوع جدیدی از پیچه‌های نوری هستند که نمایه‌ی شدت عرضی آن‌ها نشان‌دهنده‌ی مرکزی تاریک با دامنه صفر است. این پیچه‌ها مانند پیچه‌های نوری معمولی، دارای یک تکینگی در این مرکز تاریک هستند که فاز پرتو در آن تعریف نشده است. الگوی فاز پیچه‌های نوری کامل ساختاری پیچشی حول محور انتشار پرتو دارد. مشابه پیچه‌های نوری معمولی برای پیچه‌های نوری کامل نیز بار توپولوژیکی تعریف می‌شود که مقدار آن با l نمایش داده می‌شود. مهم‌ترین ویژگی پیچه‌های نوری کامل عدم وابستگی بار توپولوژیکی آن‌ها به قطر پیچه‌ی نوری است. به عبارت دیگر شعاع مرکز تاریک پیچه‌ی نوری کامل برای بارهای توپولوژیکی مختلف تقریباً ثابت است[۱]. روش‌های متفاوتی مانند استفاده از اکسیکون [۲] برای تولید پیچه‌های نوری کامل وجود دارد.

در این مقاله به منظور تولید و بررسی ویژگی‌های پیچه‌های نوری کامل، پراش پرتوی بسل-گوسی از توری‌های چنگالی لاگر-گوسی مد نظر قرار گرفته است. پرتوهای بسل-گوسی یکی از جواب‌های معادله‌ی موج هلمهولتز هستند که از حل این معادله در دستگاه مختصات استوانه‌ای به دست می‌آیند[۳]. پرتوی بسل-گوسی در واقع ترکیبی از یک پرتوی بسل و یک موج گوسی است. این پرتوها همانند پرتوهای لاگر-گوسی دارای الگوی فاز پیچشی هستند و در دسته‌ی پرتوهای گردابی جای می‌گیرند با این تفاوت که برای توصیف ویژگی‌های آن‌ها علاوه بر بار توپولوژیکی l باید پارامتر مهم دیگری که توصیف کننده شعاع این پرتوها است در نظر گرفته شود. پرتوی بسل-گوسی دارای خاصیت تکانه زاویه‌ای مداری است که در دستکاری و به دام اندازی ذرات کوچک کاربرد دارد[۴]. در این کاربردها دستیابی به گرداب‌هایی با بار توپولوژیکی زیاد و مرکز تاریک کوچک مورد نظر است. بنابراین دستیابی به پیچه‌های نوری کامل، این امکان را تا حد زیادی فراهم می‌نماید.

در این مقاله ابتدا رابطه‌ی ریاضی توصیف کننده‌ی پرتوی بسل-گوسی بیان شده است. حل تحلیلی پراش فرانهوفر این پرتو از توری چنگالی لاگر-گوسی انجام پذیرفته است. سپس فرآیند پراش پرتوهای بسل-گوسی دارای بار توپولوژیکی مختلف l از توری‌های چنگالی با بار توپولوژیکی متفاوت p شبیه‌سازی شده است. مقدار بار توپولوژیکی به دست آمده از رابطه‌ی تحلیلی نیز از طریق شبیه‌سازی تداخل پیچه‌ی نوری تولید شده و یک موج گوسی مورد آزمون قرار گرفته است. نتایج، حضور پرتوهای گردابی هم سایز در الگوی شدت را نشان می‌دهد که بار توپولوژیکی آن‌ها، مستقل از سایز گرداب است.

۲- پراش فرانهوفر پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی لاگر-گوسی

رابطه‌ی (۱) عبارت ریاضی توصیف کننده پرتوی بسل-گوسی منتشر شونده در راستای z را نشان می‌دهد[۱]:

(۱)

$$BG_l(r,\varphi,z)=\exp\left(-i\frac{k_t^2}{2k}\frac{z}{\mu}\right)\frac{\exp(ikz)}{\mu}\times\exp\left(-\frac{r^2}{\mu w_0^2}\right)J_l\left(\frac{k_t r}{\mu}\right)\exp(il\varphi)$$

که در این عبارت k بردار موج، $J_l\left(\frac{k_t r}{\mu}\right)$ بیانگر تابع بسل مرتبه l و عبارت $\exp(il\varphi)$ پیچشی بودن الگوی فاز این پرتو را نشان می‌دهد. پارامتر $k_t=k\sin(\alpha)$ نیز مؤلفه شعاعی بردار موج است و $\mu=\mu(z)=1+i\,z/z_R$ که $z_R=kw_0^2/2$ فاصله‌ی رایلی باریکه گوسی است.

تابع عبور توری چنگالی نیز به صورت رابطه‌ی (۲) بیان می‌شود:

$$T(r,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}t_m\exp\left[-im\left(\frac{2\pi}{D}r\cos(\varphi)-p\varphi\right)\right] \quad (۲)$$

در این رابطه m نشان دهنده‌ی مراتب پراش، t_m ضریب عبور توری برای مراتب مختلف پراش و D تناوب توری چنگالی است. p نیز بار توپولوژیکی توری چنگالی است. از طرفی انتگرال پراش فرانهوفر نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(\rho,\theta,z)=\frac{ik}{2\pi z}\times\iint_{\Delta}T(r,\varphi)U^{i}(r,\varphi,z=0)\times\exp\left[\frac{ik\rho r}{z}\cos(\varphi-\theta)\right]rdrd\varphi \quad (۳)$$

که در آن $U(\rho,\theta,z)$ میدان نوری حاصل از پراش در فاصله‌ی z از توری چنگالی است. $T(r,\varphi)$ تابع عبور توری و $U^{i}(r,\varphi,z=0)$ پرتوی فرودی بر توری در $z=0$ است. Δ نیز نشان‌گر سطح توری چنگالی است. با جایگزینی روابط (۱) و (۲) در انتگرال پراش فرانهوفر و استفاده از روابط

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

انتگرالی (۲و۱-۶۳۳-۶) بیان شده در کتاب گرادشتین[۵] و (۹-۱-۲۱) آبراموویچ[۶] برای مرتبه صفرم و مراتب بالاتر پراش به ترتیب خواهیم داشت:

$$U_0(\rho,\theta,z)=\frac{(i)^{l+1}k}{2zw_0^2}t_0\exp(il\theta)\times\exp\left(-\frac{\left(\frac{k\rho}{z}\right)^2+k_t^2}{\frac{4}{w_0^2}}\right)\times I_l\left(\frac{kk_t\rho}{2z/w_0^2}\right) \quad (۴)$$

$$U_{\pm m}(\rho,\theta,z)=\frac{(i)^{l\pm mp+1}k\,t_{\pm m}}{z}\exp(i(l\pm mp)\theta)\times\frac{\left(\frac{k\rho}{z}\right)^{l\pm mp}k_t^{\,l}\left(1/w_0^2\right)^{-\left(\frac{2l\pm mp+2}{2}\right)}}{2^{(2l\pm mp+1)}\Gamma(l\pm mp+1)}\times\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(s+\frac{l\pm mp}{2}+\frac{l}{2}+1\right)}{s!\,\Gamma(s+l+1)}\left(-\frac{k_t^{\,2}}{4/w_0^2}\right)^s\times F\left(-s,-l-s;l\pm mp+1;\left(\frac{k\rho/z}{k_t}\right)^2\right) \quad (۵)$$

که در روابط بالا I_l بیان‌گر تابع بسل اصلاح شده و F نماینده تابع **سوپر هندسی** است.

با توجه به رشد نمایی تابع I_l در رابطه‌ی (۴) به ازای مقادیر بزرگ k_t، می‌توان عبارت نمایی معادل آن یعنی $\exp(kk_t\rho/2zB)$ را جایگزین نمود که در رابطه‌ی (۶) نشان داده شده است.

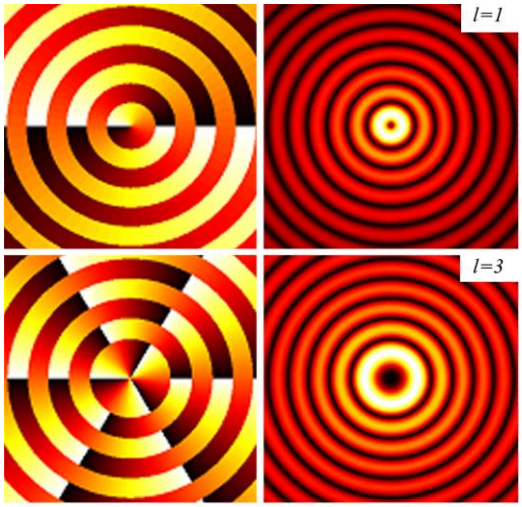
$$U_0(\rho,\theta,z)=\frac{(i)^{l+1}k}{2zw_0^2}t_0\exp(il\theta)\times\exp\left[-\frac{\left(\frac{k\rho}{z}-k_t\right)^2}{\frac{4}{w_0^2}}\right] \quad (۶)$$

همان‌طور که واضح است عبارت $\exp(il\theta)$ بیانگر حضور پرتوی گردابی با بار توپولوژیکی l در مرتبه صفرم پراش است. همچنین عدم وابستگی شعاع گرداب تولید شده یعنی k_t به بار توپولوژیکی نتیجه می‌شود: $k_t=\frac{k\rho}{z}$.

بررسی مراتب بالاتر پراش نیز وضعیت مشابهی را برای عدم وابستگی شعاع گرداب به بار توپولوژیکی نشان می‌دهد با این تفاوت که بار توپولوژیکی هر گرداب از رابطه‌ی $l\pm mp$ محاسبه می‌شود.

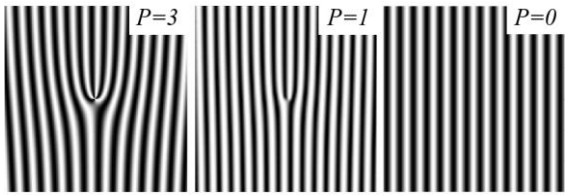
۳- شبیه‌سازی پراش فرانهوفر پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی لاگر-گوسی

الگوهای فاز و شدت دو نمونه از پرتوهای بسل-گوسی که با استفاده از رابطه‌ی (۱) تعریف شدند برای بارهای توپولوژیکی $l=1$ و $l=3$ در شکل (۱) نشان داده شده است. افزایش بار توپولوژیکی سبب افزایش اندازه‌ی لکه‌ی تاریک مرکزی شده است.



شکل(۱): الگوهای (الف) شدت و (ب) فاز پرتوی بسل-گوسی با بارهای توپولوژیکی $l=1$ و $l=3$.

به منظور شبیه‌سازی توری چنگالی لاگر-گوسی با استفاده از رابطه‌ی (۲)، پارامترهای اساسی به ترتیب برای طول موج $\lambda=532nm$، دوره‌ی تناوب توری $D=0.1$ و برای بار توپولوژیکی توری چنگالی مقادیر $p=0,1,2$ در نظر گرفته شده است. نتایج این شبیه‌سازی در شکل (۲) نشان داده شده است. همان‌طور که در این شکل مشخص است تغییر بار توپولوژیکی، به صورت تغییر در تعداد شاخه‌های الگوی چنگالی ظاهر می‌شود. تابش پرتوی فرودی بسل-گوسی به توری‌های چنگالی با ویژگی‌های ظاهری نشان داده شده در شکل (۲)، الگوی پراش در صفحه‌ی مشاهده را



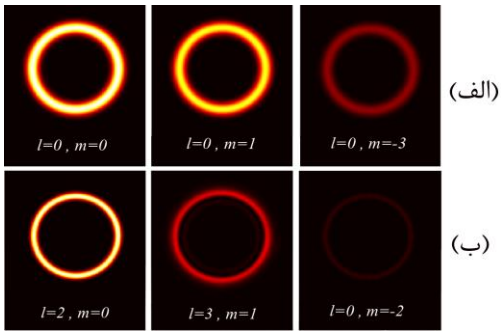
شکل (۲): توری‌های چنگالی لاگر-گوسی با مقادیر بار توپولوژیکی متفاوت $p=0,1,2$.

به دست می‌دهد. اثر گذاری توری بر روی پرتوی فرودی به آن در فرآیند شبیه‌سازی از طریق ضرب تابع عبور توری چنگالی $T(r,\varphi)$ در عبارت معرف پرتوی بسل-گوسی با بار توپولوژیکی l یعنی $BG_l(r,\varphi,z=0)$ صورت می‌گیرد. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی پراش پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی به تفکیک مراتب پراش مختلف در شکل(۳)

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

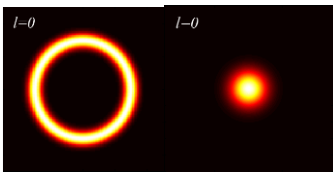
[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]

نشان داده شده است.

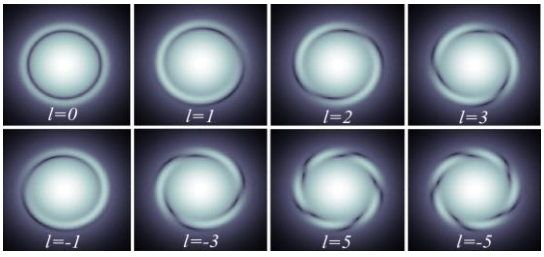


شکل (۳): پیچه‌های نوری کامل تولید شده در مراتب پراش حاصل از (الف) تابش پرتوی بسل-گوسی با $l=0$ به توری چنگالی $P=0$. (ب) تابش پرتوی بسل-گوسی با $l=2$ به توری چنگالی $P=1$.

همانطور که از شکل (۳) مشاهده می‌شود گرداب‌های شکل گرفته در تمامی مراتب پراش، با وجود تفاوت در مقدار بار توپولوژیکی دارای سایز تقریباً یکسانی هستند. هم‌چنین گرداب موجود در مرتبه صفرم در مقایسه با سایر مراتب پراش بیش‌ترین شدت را دارد. مقادیر بار توپولوژیکی گرداب‌های شکل (۳) از روابط تحلیلی محاسبه شده است. به منظور صحت سنجی روابط تحلیلی در تعیین مقادیر بار توپولوژیکی، تداخل پیچه‌های نوری کامل تولید شده با یک موج گوسی شبیه‌سازی شده است. الگوهای تداخلی حاصل برای پیچه‌های نوری با بارهای توپولوژیکی مختلف در شکل (۴) نمایش داده شده است. طبق این شکل، الگوهای تداخلی به صورت خطوط دورانی ظاهر شده‌اند که تعداد خطوط تاریک موجود در الگوی تداخل تعیین کننده‌ی مقدار بار توپولوژیکی پیچه‌ی نوری است. جهت چرخش خطوط تاریک نیز نشان دهنده‌ی علامت بار توپولوژیکی است که در واقع جهت چرخش پیچه‌ی نوری را مشخص می‌کند.



شکل (۵): تفاوت الگوهای شدت پیچه‌ی نوری کامل و پیچه‌ی نوری لاگر-گوسی در بار توپولوژیکی $l=0$.



شکل (۴): الگوهای تداخل موج گوسی با پیچه‌های نوری دارای بارهای توپولوژیکی مختلف.

یکی از تفاوت‌های پیچه‌ی نوری کامل با پیچه‌های نوری لاگر-گوسی در بار توپولوژیکی $l=0$ است. شکل (۵) تفاوت پیچه‌ی نوری کامل و لاگر-گوسی را برای $l=0$ نشان می‌دهد. پیچه‌ی نوری لاگر-گوسی با $l=0$، در واقع یک پرتو با توزیع شدت گوسی است. اما پیچه‌ی نوری کامل با بار توپولوژیکی صفر، الگوی شدتی به صورت گرداب دارد. به عبارت دیگر بار توپولوژیکی آن مستقل از شعاع مرکز تاریک است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله پراش فرانهوفر پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی لاگر-گوسی به صورت تحلیلی و شبیه‌سازی بررسی شده است. نتایج حاصل از حل تحلیلی انتگرال پراش، شکل‌گیری پیچه‌های نوری کامل را در مراتب پراش پیش‌بینی کردند که درستی این موضوع از طریق شبیه‌سازی و بررسی الگوهای شدت حاصل از پراش پرتوی بسل-گوسی از توری چنگالی نشان داده شده است. مقادیر بار توپولوژیکی نیز از طریق روابط تحلیلی محاسبه و سپس از طریق شبیه‌سازی الگوهای تداخلی مورد آزمون قرار گرفته است. هم‌چنین عدم وابستگی شعاع پیچه‌ی نوری به بار توپولوژیکی از طریق روابط تحلیلی و شبیه‌سازی نشان داده شده است.

مراجع

[1] P. Vaity and L. Rusch, "Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam", Opt. Lett., Vol. 40, No. 4, pp. 597-600, 2015.
[2] M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E. M. Wright, and K. Dholakia, Opt. Lett. Vol. 38, No. 22, pp. 4919-4922, 2013.
[3] G .Vega, J. C., and M .A. Bandres. "Helmholtz–Gauss waves." JOSA A 22.2, pp 289-298, 2005.
[4] Arlt, J., Garces-Chavez, V., Sibbett, W., & Dholakia, K."Optical micromanipulation using a Bessel light beam." Optics Communications, 197(4), pp 239-245, 2001.
[5] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, p. 707, Elsevier Inc, 2007.
[6] M. Abramowitz, and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. Vol. 55. Courier Corporation, 1964.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-06]