بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

# شبیه‌سازی ورتکس اپتیکی پرتو ایری سوسوزن شده تحت تبدیل فوریه کسری

**[۱] فروزان حبیبی، [۲] محمد مرادی و [۳] علیرضا انصاری**
**[۱] دانشجو کارشناسی ارشد، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد**
**[۲] استادیار، گروه پژوهشی فوتونیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد**
**[۳] دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهرکرد**

**چکیده** – جبهه موج هنگام عبور از آشفتگی‌جوی انحراف پیدا می‌کند و باعث کاهش کیفیت تصاویر دریافتی در سامانه اپتیکی می‌شود. دامنه میدان در محل ورتکس نزدیک به صفر است. فاز اطراف هسته می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در این مقاله ورتکس پرتو ایری سوسوزن تحت تبدیل فوریه کسری و تبدیل فوریه غیرکسری شبیه‌سازی می‌شود. برای شبیه‌سازی ورتکس پرتو ایری که مسافت **Z** را طی می‌کند، از انتگرال فرنل استفاده می‌کنیم. با یک تقریب پیرا محوری حالت کسری این انتگرال به دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که محل ورتکس پرتو ایری معمولی با پرتو ایری تحت تبدیل فوریه کسری متفاوت است. برای شبیه‌سازی پرتو سوسوزن شده از صفحات فاز استفاده می‌کنیم که توسط چند جمله‌ای‌های زرنیک بیان می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که با تغییر آشفتگی، مکان ورتکس تغییر کرده است.

کلید واژه- ورتکس اپتیکی، صفحه فازی، پرتو ایری، تبدیل فوریه کسری.

# The Simulation of optical vortex scintillated Airy beam under Fractional Fourier transform

Foruzan Habibi 1, Mohammad Moradi 2 and Alireza Ansari 3

[1] MSc Student, Faculty of Sciences, University of Shahrekord, *fruzan.habibi@yahoo.com*

[2]Assistant professor, Photonics Research Group, Faculty of Sciences, University of Shahrekord

[3]Associate professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Shahrekord

Abstract- The wave front distorted after passing through the turbulent atmosphere and decreased image quality received for the optical system. At the position of vortex, the amplitude is close to zero. Around the vortex core, the phase can be positive or negative. At this article, an optical vortex of scintillation Airy beam was simulated by Fractional Fourier transform and without Fractional Fourier transform. For simulation of an optical vortex after propagating the distance z, we use the Fresnel diffraction integral. Fractional Fresnel integral can be calculated By the paraxial approach. The positions of optical vortex Airy beam for Fractional Fourier transform and without Fractional Fourier transform are different. For simulation of scintillation beam, we use the phase screen that expressed by Zernike polynomial. The results show that by changed turbulence, the vortex location is changed.

Keywords: optical vortex, phase screen, Airy beam, Fractional Fourier transform.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02 ]



این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

## ۱- مقدمه

پرتو سوسوزن شده [1] می‌تواند از نوع امواج تخت، گوسی، لاگر گوسی، هرمیت گوسی و ایری باشد. یافتن موقعیت ورتکس از طریق شبیه‌سازی آن روشی برای بهبود عملکرد سیستم‌های اپتیکی است. با حل معادله شرودینگر آزاد-واداشته نیز دو دسته جواب به دست می‌آید [2] ، دسته اول، توابع ایری و دسته دوم یک عملگر لاگر گوسی است. توابع ایری مشخصه شتاب آزاد و خواص خود اصلاح‌کننده دارند. تکامل برداری ، اندازه حرکت زاویه‌ای و رفتار فازی پرتو ایری بررسی‌شده است [5, 4, 3]. روش‌های مختلفی از جمله روش اپتیک هندسی و روشی از تابع توزیع ویگنر برای شرح ویژگی‌های پرتو ایری ارائه شده‌است [8,7,6]. پیش از این انتشار پرتوهای ایری در فضای آزاد [9]، در آب [10]، در محیط غیرخطی [11] و آشفتگی جو [12] مورد بررسی قرار-گرفته است. یک پرتو ایری معمولی در فضای دکارتی به صورت زیر است. یکی از خصوصیات پرتو ایری این است که اگر یک مسافت معینی را در فضا طی کند یک پیچش پیدا کرده و به بیان دیگر ورتکس به وجود می‌آید. میدان یک پرتو ایری که یک ورتکس دارد به صورت زیر است [14].

$$E(x,y)= Ai\left(\frac{x}{x_0}\right)\exp\left(\frac{ax}{x_0}\right)Ai\left(\frac{y}{y_0}\right)\exp\left(\frac{ay}{y_0}\right)\left((x-x_d)+i(y-y_d)\right)^l \quad (۱)$$

دراین رابطه محل ورتکس در نقطه $(x_d, y_d)$ است و مؤلفه z صفر است. میدان این پرتو در فاصله z به وسیله انتگرال فرنل به دست می‌آید که با جایگذاری در رابطه قبل به صورت زیر است.

$$U(x,y,z)=\frac{ik}{2\pi z}\iint \exp\left(i\frac{k}{2z}\left((x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right)\right)\times Ai\left(\frac{x_1}{x_0}\right)Ai\left(\frac{y_1}{y_0}\right)\exp\left(\frac{ax_1}{x_0}+\frac{ay_1}{y_0}\right)\left((x_1-x_d)+i(y_1-y_d)\right)dx_1dy_1 \quad (۲)$$

در این رابطه برای سادگی $l=1$ در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن تقریب پیرامحوری برای یک انتگرال فرنل روابط زیر برقرار است.

$$\psi'(x',y')= \iint (U(x,y,x',y')=\frac{1}{i\lambda}\frac{\exp(ik\rho)}{\rho}\cos(\vec{u}.\vec{\rho}))^*\psi(x,y)dx'dy' \quad (۳)$$

$$\rho=\sqrt{z^2+(x'-x)^2+(y'-y)^2}\cong z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y'}{z}\right)^2\right] \quad (۴)$$

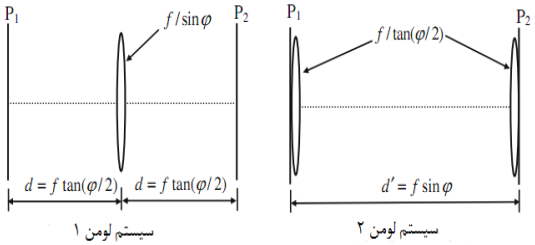
رابطه (۴) را در (۳) جایگذاری کرده و انتگرال فرنل به انتگرال کلین تبدیل می‌شود.

$$U(x,y,x',y')= \frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left(i\frac{\pi}{z\lambda}(x^2+y^2)\right)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx'+yy')\right) \quad (۵)$$

$$\rho=z+\frac{1}{2z}\left(Ax^2-2xx'+Dx'^2\right) \quad (۶)$$

$$E(x,y)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda B}\exp\left[\frac{ikD(x^2+y^2)}{2B}\right]\times \int_{-\infty}^{\infty}Ai\left(\frac{x'}{x_0}\right)\exp\left(\frac{ax'}{x_0}\right)\exp\left[\frac{ik}{2B}\left(Ax'^2-2x'x\right)\right]dx'\times \int_{-\infty}^{\infty}Ai\left(\frac{y'}{y_0}\right)\exp\left(\frac{ay'}{y_0}\right)\exp\left[\frac{ik}{2B}\left(Ay'^2-2y'y\right)\right]dy' \quad (۷)$$

در این انتگرال پارامترهای $A$ و $B$ و $C$ و $D$ مربوط به ماتریس $ABCD$ هستند.




شکل(۱)

تبدیل فوریه معمولی در اپتیک و پردازش اطلاعات نوری حیاتی است. در تبدیل فوریه کسری نیز که به طور گسترده در بسیاری از پرتوهای لیزر مورد بررسی قرار گرفته‌اند، تابع توزیع ویگنر توسط زاویه $\varphi = P\pi/2$ چرخش پیدا می کند. $P$ مرتبه تبدیل فوریه است. در سیستم لومن ۱ در شکل ۱، فاصله بین صفحه ورودی و خروجی برابر $d = f\tan(\varphi/2)$ و در سیستم لومن ۲ در شکل ۱، فاصله بین دو صفحه برابر $d' = f\sin(\varphi)$ است. ماتریس انتقال سیستم لومن ۱ به صورت زیر است.

$$R=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\sin\frac{\varphi}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & f\sin\varphi\\ -\sin\frac{\varphi}{f} & \cos\varphi\end{pmatrix} \quad (۸)$$

سپس از انتگرال کلین استفاده و مقادیر بالا را در آن



این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02 ]

جایگذاری می‌کنیم. برای شبیه‌سازی صفحات فازی از چند جمله‌ای‌های زرنیک استفاده می‌کنیم [15]. پرتوها تحت تأثیر آشفتگی جو تبدیل به یک پرتو سوسوزن شده می‌شوند.

$$\varphi = \sum_i a_i Z_i \qquad (۹)$$

$$Z_n^m(x,y) = \sqrt{2(n+1)} \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{|m|}{2}} \frac{(-1)^{s+k}(n-s)!}{s!\left[\frac{n+|m|}{2}-s\right]!\left[\frac{n-|m|}{2}-s\right]!} \binom{\frac{n-m}{2}-s}{j} \binom{m}{2k} X^{n-2(s+j+k)} Y^{2(j+k)} \quad m \succ 0$$

(۱۰)

$a_i$ دامنه ابیراهی است. یک صفحه فاز کاتوره‌ای مبتنی بر چندجمله‌ای‌های زرنیک که توسط اعمال ضرایب وزن‌دار شده بر اساس مجموعه‌ای از چندجمله ای‌های زرنیک تولید می‌شود. ضرایب $a_i$ کاتوره‌ای هستند. اما این ضرایب باید خواص هم‌بستگی استخراج شده از یک چگالی طیفی توان معین که در حقیقت توصیف‌کننده افت و خیزهای فاز به سبب آشفتگی جو است را برآورده کند. به عبارت دیگر ضرایب زرنیک وزن‌دارشده از ماتریس هم‌وردای ضرایب چندجمله‌ای‌های زرنیک برای هر $D/r_0$ مشخص تعیین می‌شوند. برای ساختن عناصر $a_i$ ابتدا عناصر ماتریس هم-وردای زرنیک را تولید کرده، عامل چالسکی ماتریس هم‌وردا به صورت زیر است.

$$C = RR^T \qquad (۱۱)$$

که $C$ ماتریس هم‌وردا و $R$ عامل چالسکی است و بردار ستونی وزنی کاتوره‌ای مورد نظر به صورت زیر است.

$$a = Rb \qquad (۱۲)$$

که $b$ یک متغیر کاتوره‌ای است. عامل $R$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

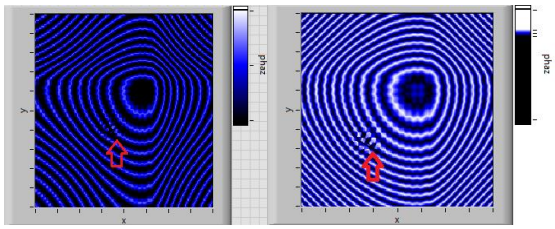
$$E(a_i,a_j) = 0.0072\left(\frac{D}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}(-1)^{(n_i+n_j-2m_i)/2} \times [(n_i+1)+(n_j+1)]^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{8}{3}} \delta_{mimj} \times \frac{\Gamma\left(\frac{14}{3}\right)\Gamma\left[\frac{(n_i+n_j-\frac{5}{3})}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{(n_i-n_j+\frac{17}{3})}{2}\right]\Gamma\left[\frac{(n_i-n_j+\frac{17}{3})}{2}\right]\Gamma\left[\frac{(n_i+n_j+\frac{23}{3})}{2}\right]} \qquad (۱۲)$$

اگر آشفتگی به صورت افقی به فاز وارد شود، محل ورتکس با زمان تغییر می‌کند (شکل۵). تغییر محل ورتکس در صفحه فاز از رابطه زیر به دست می‌آید.

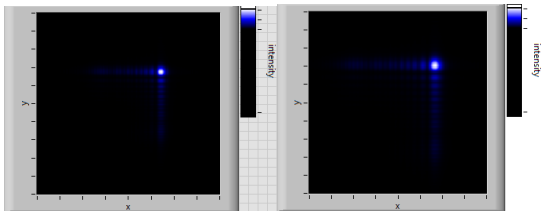
$$\Delta\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y \qquad (۱۳)$$

## ۲- روش انجام کار

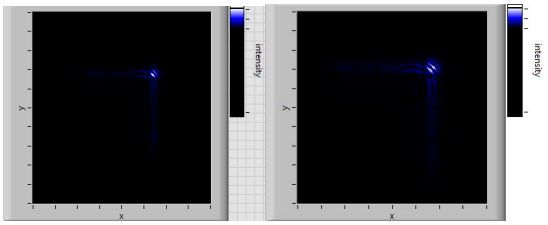
در رابطه (۲) مقادیر $(x_d\ ,\ y_d)$ برابر با $(0.3\ ,\ 0.3)mm$ است. نمودارهای زیر موقعیت ورتکس‌ها را نشان می‌دهند. بازه نمودار فاز و شدت شکل ۲ و ۳ و ۴ در $mm$ (-3,2) است (برای یافتن محل ورتکس از یک تابع فاز زمینه استفاده می-کنیم).



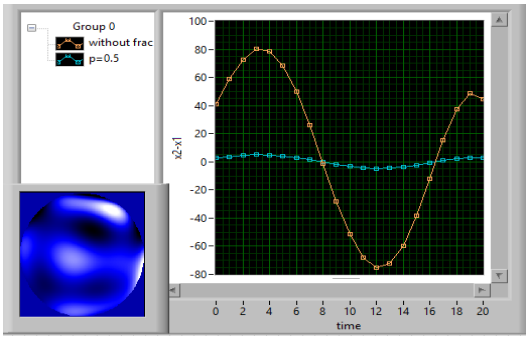

شکل (۲) نمودار فاز پرتو ایری معمولی دارای ورتکس و نمودار ایری تحت تبدیل فوریه کسری دارای ورتکس به ازای $p$=0.5 و $z$=1000$mm$ است.




شکل (۳) نمودار شدت پرتو ایری معمولی دارای ورتکس و نمودار ایری تحت تبدیل فوریه کسری دارای ورتکس به ازای $p$=0.5 و $z$=1000$mm$ است.




شکل (۴) نمودارهای شدت نظیر شکل (۳) است که تحت آشفتگی $D/r0$=0.2 سوسوزن شده است.



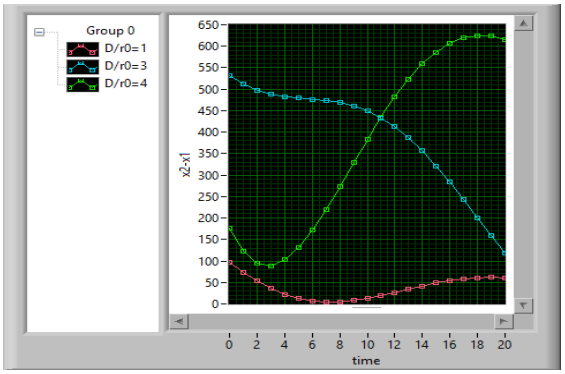

شکل (۵) نمودار مقایسه‌ای تغیر مکان ورتکس مربوط به دو پرتو معمولی سوسوزن شده و پرتو ایری سوسوزن شده تحت تبدیل فوریه کسری است که



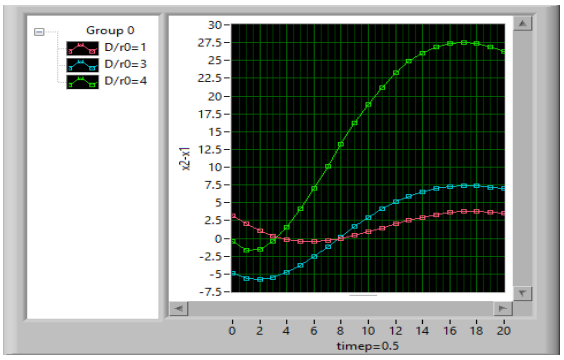
این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02 ]

قسمت سمت چپ نمودار صفحه فازی مربوط به آن است که با استفاده از چند جمله‌ای‌های زرنیک شبیه‌سازی شده است و دارای $D/r_0$=2 است.




شکل (۶) نمودار تغییر مکان ورتکس با زمان مربوط به پرتو ایری دارای ورتکس برای سه حالت با $D/r_0$ مختلف است.




شکل (۷) نمودار تغییر مکان ورتکس با زمان مربوط به پرتو ایری دارای ورتکس است که تحت تبدیل فوریه کسری قرار گرفته و برای سه حالت با $D/r_0$ مختلف است.

## نتایج

با مقایسه نمودارها مشاهده می‌کنیم نمودارهای شدت پرتو ایری معمولی و پرتو ایری تحت تبدیل فوریه کسری موقعیت ورتکس‌ها را نشان نمی‌دهد. با رسم نمودار فاز مربوط به آن-ها موقعیت ورتکس قابل مشاهده است که تحت شرایط یکسان برای پرتو ایری معمولی و پرتو ایری تحت تبدیل فوریه کسری متفاوت است و با علامت‌گذاری نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد، زمانی‌که پرتو تحت تاثیر آشفتگی قرار می‌گیرد نمودار شدت تغییر می‌کند و نمودار فاز یک الگوی کاملاً به هم‌ریخته پیدا می‌کند و تنها راه برای یافتن محل ورتکس استفاده از تغییر فاز و سپس به‌دست‌آوردن تغییر مکان آن است. با داشتن یک صفحه فاز مشترک برای دوحالت پرتو ایری معمولی و پرتو ایری تحت تبدیل فوریه کسری افت و خیز کاملاً متفاوت است. مشاهده می‌کنیم، با افزایش $D/r_0$ افت و خیز نمودار مربوط به هرکدام افزایش می‌یابد که به معنای افزایش آشفتگی است.

## سپاسگزاری

لازم است از گروه پژوهشی فوتونیک دانشگاه شهرکرد به واسطه حمایت های انجام شده تشکر کنیم.

## مراجع

[۱] رابرت کی. تایسون. مترجم؛ محمد مرادی، محمد شهراد، اصول اپتیک تطبیقی (ویرایش دوم)، انتشارات جهاد دانشگاهی، (۱۳۹۰).
[2] M. V. Berry, N. L. Balazs, American Journal Physics. **47,** 264-267, (1979).
[3] M. Chen, F. S. Roux, J. Opt. Soc. Am. A. **25**, 1279-1286, (2008).
[4] G. A. Siviloglou, D. N. Christodoulides, Optics Letters, **32**, (2008).
[5] H. I. Sztul, R. R. Alfano, Optics Express, **16**, (2008).
[6] J. Brokly, G. A. Siviloglou, A. Dogariu and D. N. Christodoulides, Optics Express, **16**, 12880-12891, (2008).
[7] R. Chen, H. Zheng and C. Dai, J. Opt. Soc. Am. **28,** 1307-1311, (2011).
[8] Y. Gu, G. Gbur, Optics Letters, **35,** 3456-3458, (2010).
[9] R. Chen, C. Ying, Journal of Optics, **13**, (2011).
[10] P. Polynkin, M. Kolesik and Moloney, Physical Review Letters, **103,** 123902-123904, (2009).
[11] R. Chen, C. Ying, X. Chu and H. Wang, Physical Review, **82**, (2010).
[12] Y. Gu, G. Gbur, Opt. Lett. **35**, (2010).
[13] H. T .Dai, Y. J. Liu, Optics Letters, 35, 4075-4077, (2010).
[14] G. Zhou. R. Chen and X. Chu, Applied Physics, 109, 549-556, (2012).
[15] R. Noll, Journal of Optics, **66**, 207-211, (1976).



این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[ Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-02 ]