بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

مقایسه میزان درهم‌تنیدگی میان یون‌های به دام افتاده دوترازی و سه‌ترازی در برهم-کنش با میدان‌های کوانتیده

نوید یزدان‌پناه[۱]، محمدکاظم توسلی[۱،۲]

(۱)گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

(۲)گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله، ابتدا برهم‌کنش میان یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی نوع V، Λ و نردبانی را با میدان کوانتیده دومدی مورد مطالعه قرار می‌دهیم . سپس با حل معادله وابسته به زمان شرودینگر برای هر کدام از یون‌ها، تحول زمانی درهم‌تنیدگی میان آن‌ها و میدان دومدی را به دست آورده و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. درنهایت، با جایگزینی یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی توسط یون دوترازی و مقایسه درهم‌تنیدگی میان آن‌ها و میدان کوانتیده، نشان خواهیم داد که در شرایط یکسان، یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی بیشتر از یون دوترازی با میدان کوانتیده درهم‌تنیدگی از خود نشان می‌دهند.

کلید واژه- آنتروپی خطی، درهم‌تنیدگی، یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی.

The comparison between the entanglement of trapped two- and three-level ions in the interaction with the quantized fields

N. Yazdanpanah[1]; M. K. Tavassoly[1,2]
(1) Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd
(2) Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper, the interaction between V-, Λ- and ladder-type trapped three-level ions with a two-mode quantized field is studied. Then, by solving the time-dependent Schrödinger equation for each of the mentioned trapped ions, the time evolution of entanglement between them and the quantized field is studied and compare with each other. Finally, by substituting three-level ions with two-level ones, we compare the entanglement between the two- and three-level trapped ions with the quantized field. It is concluded that in the same interaction condition, three-level trapped ions show more degrees of entanglement with the quantized field as compared with two-level ion.

Keywords: Linear entropy, entanglement, trapped three-level ions.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

۱- مقدمه

امروزه یون‌های به دام افتاده برای پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی به کار می‌روند [۱]. این سامانه‌ها دارای دو درجه آزادی داخلی و خارجی هستند. درجات آزادی داخلی مربوط به ترازهای داخلی یون و درجات آزادی خارجی مربوط به حرکت ارتعاشی مرکز جرم یون در داخل دام است [۱]. درهم‌تنیدگی میان یون‌های به دام افتاده و میدان‌های کوانتیده از جمله مسائل اساسی است که بایستی در پردازش اطلاعات کوانتومی در نظر گرفته شود. تا به حال مطالعات زیادی در مورد میزان درهم‌تنیدگی میان یون‌های به دام افتاده دوترازی با میدان‌های کوانتیده انجام شده است [۲] که پایه و اساس نظریه‌ی طراحی کامپیوترهای کوانتومی می‌باشند [۱]. اما جای خالی یون‌های سه‌ترازی در این‌گونه مطالعات هنوز احساس می‌شود. لذا در این مقاله به بررسی میزان درهم‌تنیدگی یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی با میدان کوانتیده دومدی می‌پردازیم. بدین منظور، یون‌های سه‌ترازی تحت بررسی در این مقاله از انواع V، Λ و نردبانی هستند که با میدان‌های کوانتیده دومدی در حال برهم‌کنش هستند. هدف این مقاله این است که با مقایسه میزان درهم‌تنیدگی میان هر یک از یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی با میدان کوانتیده دومدی، دریابیم که در شرایط هم ارز کدام یک از انواع یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی با میدان کوانتیده بیشتر درهم‌تنیده می‌شوند. هم‌چنین، با مقایسه درهم‌تنیدگی یون-های به دام افتاده سه‌ترازی و دوترازی با میدان‌های کوانتیده، دریابیم که افزایش تعداد ترازهای یونی چه تاثیری بر میزان درهم‌تنیدگی یون با میدان دارد.

۲- برهم‌کنش میان یون‌های به دام افتاده سه-ترازی با میدان کوانتیده دومدی

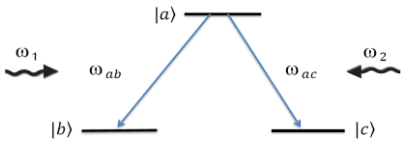
در این بخش، برهم‌کنش میان یک یون به دام افتاده سه-ترازی با یک میدان کوانتیده دومدی را در حالت کلی در نظر می‌گیریم. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که این برهم‌کنش تحت تاثیر یک محیط غیرخطی کر قرار دارد[1] [۳]. با تعمیم هامیلتونی برهم‌کنش سامانه یون به دام افتاده دوترازی با میدان کوانتیده [۲] به سامانه سه‌ترازی، هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش (در حالت تشدید) برای چنین سامانه‌ای با به کاربردن تقریب دوقطبی و نیز تقریب امواج چرخان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{H}_{\rm int} = i\hbar g_1\left(\hat{c}_1\ f(\hat{n}_1)\,\hat{\Sigma}_+^{(1)} - f(\hat{n}_1)\,\hat{c}_1^\dagger\ \hat{\Sigma}_-^{(1)}\right) \quad (1)$$
$$+ i\hbar g_2\left(\hat{c}_2\ f(\hat{n}_2)\,\hat{\Sigma}_+^{(2)} - f(\hat{n}_2)\,\hat{c}_2^\dagger\ \hat{\Sigma}_-^{(2)}\right)$$
$$+ \hbar\chi_1\hat{c}_1^{\dagger 2}\hat{c}_1^2 + \hbar\chi_2\hat{c}_2^{\dagger 2}\hat{c}_2^2$$

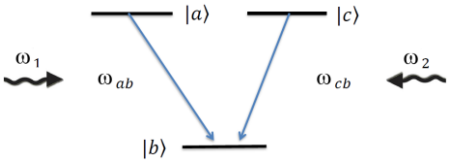
در این رابطه g_j ثابت جفت‌شدگی برهم‌کنش مد j ام میدان با یون به دام افتاده می‌باشد که وابسته به پارامتر لمب-دیک است و $\hat{c}_j$ ($\hat{c}_j^\dagger$) عملگر نابودی (آفرینش) فوتونی مد j ام میدان است ($j=1,2$). هم‌چنین، $f(\hat{n}_j)$ یک تابع وابسته به شدت مد j ام میدان کوانتیده است که بیانگر میزان جفت‌شدگی وابسته به شدت میان یون به دام افتاده و مد j ام میدان است و $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger\hat{c}_j$. عملگر $\hat{\Sigma}_+^{(j)}$ ($\hat{\Sigma}_-^{(j)}$) بیانگر عملگر بالابرنده (پایین‌برنده) کل برای گذار j ام در سامانه یون به دام افتاده سه‌ترازی است و $\hat{\Sigma}_-^{(j)} = \hat{\Sigma}_+^{(j)\dagger}$ که با توجه به شکل‌های ۱ تا ۳ برای انواع یون‌های سه‌ترازی داریم:

$$\hat{\Sigma}_+^{(1)\Lambda} = \hat{b}^\dagger|a\rangle\langle a|, \qquad \hat{\Sigma}_+^{(2)\Lambda} = \hat{b}^\dagger|a\rangle\langle c| \quad (2)$$
$$\hat{\Sigma}_+^{(1)V} = \hat{b}^\dagger|a\rangle\langle b|, \qquad \hat{\Sigma}_+^{(2)V} = \hat{b}^\dagger|c\rangle\langle b|$$
$$\hat{\Sigma}_+^{(1)L} = \hat{b}^\dagger|a\rangle\langle b|, \qquad \hat{\Sigma}_+^{(2)L} = \hat{b}^\dagger|b\rangle\langle c|$$

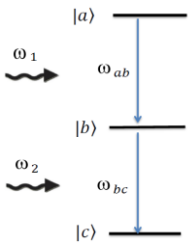
که در آن $\omega_j\,(j=1,2)$ بسامد مد j ام میدان دومدی است.



شکل ۱: یون به دام افتاده نوع Λ.



شکل ۲: یون به دام افتاده نوع V.



شکل ۳: یون به دام افتاده نوع نردبانی L.

[1] Kerr medium

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

هم‌چنین، پارامتر χ_j در رابطه (۱) نشان‌دهنده‌ی اثر محیط کر روی j امین مد میدان است. با توجه به هامیلتونی (۱)، معادله‌ی وابسته به زمان شرودینگر در تصویر برهم‌کنش برای سامانه‌ی یون‌های سه‌ترازی به صورت زیر است:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left|\Psi(t)\right\rangle = \hat{H}_{\text{int}}\left|\Psi(t)\right\rangle \quad (3)$$

که در آن $\left|\Psi(t)\right\rangle$ بیانگر تابع موج یون به دام افتاده سه‌ترازی است. برای هر کدام از یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی تابع موج به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned}\left|\Psi_{\Lambda}(t)\right\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} A_{m,n_1,n_2}(t)\left|a,m,n_1,n_2\right\rangle \quad (4)\\ &+ B_{m-1,n_1+1,n_2}(t)\left|b,m-1,n_1+1,n_2\right\rangle\\ &+ C_{m-1,n_1,n_2+1}(t)\left|c,m-1,n_1,n_2+1\right\rangle\\ \left|\Psi_{V}(t)\right\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} A_{m,n_1,n_2}(t)\left|b,m,n_1,n_2\right\rangle\\ &+ B_{m-1,n_1+1,n_2}(t)\left|a,m+1,n_1-1,n_2\right\rangle\\ &+ C_{m-1,n_1,n_2+1}(t)\left|c,m+1,n_1,n_2-1\right\rangle\\ \left|\Psi_{L}(t)\right\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} A_{m,n_1,n_2}(t)\left|a,m,n_1,n_2\right\rangle\\ &+ B_{m-1,n_1+1,n_2}(t)\left|b,m-1,n_1+1,n_2\right\rangle\\ &+ C_{m-2,n_1+1,n_2+1}(t)\left|c,m-2,n_1+1,n_2+1\right\rangle\end{aligned}$$

برای حل معادله (۳) از روش ماتریسی استفاده می‌کنیم. بدین منظور با تبدیل معادله (۳) به شکل ماتریسی داریم:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -M\ R(t) \quad (5)$$

که در آن $R(t)$ یک ماتریس ستونی بوده که عناصر آن دامنه‌های احتمال تشکیل دهنده تابع موج $\left|\Psi\right\rangle$ هستند و در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R(t) = \left(A(t) \quad B(t) \quad C(t)\right)^T \quad (6)$$

هم‌چنین، M یک ماتریس ۳×۳ مستقل از زمان است که ارتباط میان عناصر ماتریسی $dR(t)/dt$ و $R(t)$ را برقرار می‌کند. با محاسبه‌ی ویژه مقادیر و ویژه توابع ماتریس M داریم:

$$Mv_i = \lambda_i v_i \quad (7)$$

که در این رابطه v_i ویژه‌تابع iام ماتریس M و λ_i ویژه مقدار متناظر با این ویژه تابع است ($i = 1, 2, 3$). با تعیین ماتریس $V = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)$ که یک ماتریس ۳×۳ است که از ویژه‌توابع ماتریس M تشکیل شده است، جواب معادله (۵) به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$R(t) = V\, e^{-Dt}\, V^{-1}\, R(0) \quad (8)$$

که $D = V^{-1}MV$ و یک ماتریس قطری است. حال برای یون‌های به دام افتاده مورد نظر با استفاده از رابطه (۴) داریم:

$$R_{\Lambda}(t) = \left(A_{m,n_1,n_2}(t) \quad B_{m-1,n_1+1,n_2}(t) \quad C_{m-1,n_1,n_2+1}(t)\right)^T \quad (9)$$

$$R_{V}(t) = \left(A_{m,n_1,n_2}(t) \quad B_{m-1,n_1+1,n_2}(t) \quad C_{m-1,n_1,n_2+1}(t)\right)^T$$

$$R_{L}(t) = \left(A_{m,n_1,n_2}(t) \quad B_{m-1,n_1+1,n_2}(t) \quad C_{m-2,n_1+1,n_2+1}(t)\right)^T$$

که با استفاده از معادلات (۳)-(۹) و در نظر گرفتن شرایط اولیه به صورت $R(0) = (A(0) \ \ 0 \ \ 0)$ و انجام محاسبات نسبتا طولانی، توابع موج $\left|\Psi_{\Lambda}(t)\right\rangle$، $\left|\Psi_{V}(t)\right\rangle$ و $\left|\Psi_{L}(t)\right\rangle$ حاصل می‌شوند. پس از به دست آوردن توابع موج برای یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی در برهم‌کنش با میدان کوانتیده دومدی، به دنبال بررسی درهم‌تنیدگی میان یون‌ها و میدان هستیم.

۳- درهم‌تنیدگی میان یون به دام افتاده سه‌ترازی و میدان کوانتیده

در این مقاله، برای بررسی میزان درهم‌تنیدگی میان یون‌های به دام افتاده و میدان از معیار آنتروپی خطی استفاده می‌کنیم. در یک سامانه مرکب AB، آنتروپی خطی برای زیرسامانه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_A = 1 - Tr_A(\hat{\rho}_A^2) \quad (10)$$

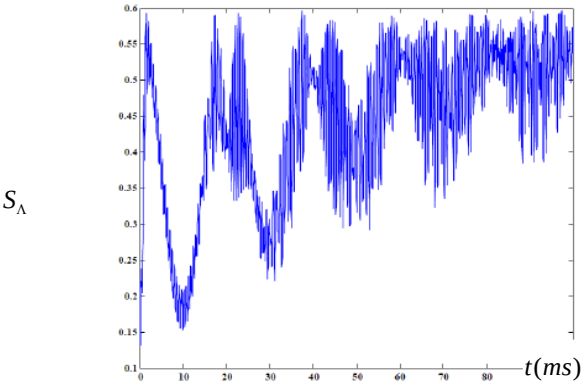
که در آن $\hat{\rho}_A$ ماتریس کاهش یافته زیر سامانه A است که $\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho}_{AB})$ و $\hat{\rho}_{AB}$ ماتریس چگالی سامانه مرکب AB است. کمیت S_A در واقع تعیین کننده میزان درهم‌تنیدگی سامانه‌ی A و سامانه‌ی B است. مقدار بیشینه این کمیت برای حالتی که دو سامانه کاملاً درهم‌تنیده هستند برابر با یک و برای دوسامانه کاملا مجزا، صفر است.

شکل‌های ۴، ۵ و ۶ به ترتیب نشان‌دهنده آنتروپی خطی برای یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی نوع Λ، V، و نردبانی در برهم‌کنش با میدان کوانتیده دومدی هستند. همان‌گونه که در این نمودارها دیده می‌شود، آنتروپی از مقدار صفر در زمان $t = 0$ شروع می‌شود و با یک رفتار نوسانی شدید به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد و سپس با گذشت زمان، حول یک مقدار ثابت نوسان می‌کند. آن چه از این نمودارها نمایان می‌باشد این است که رفتار آنتروپی خطی برای یون‌های به‌دام افتاده نوع Λ و V تقریبا مشابه بوده و با نوع نردبانی کاملاً متفاوت است. هم‌چنین، در مقایسه سه

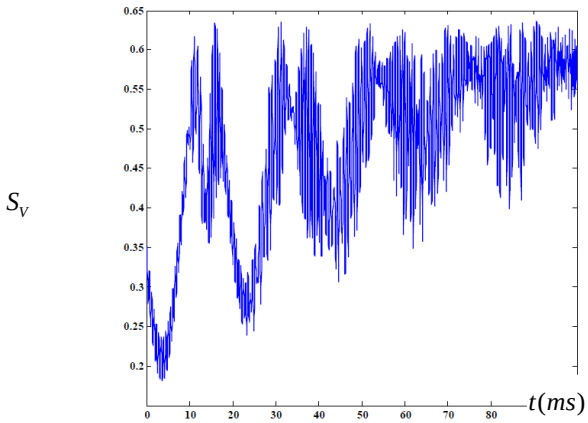
این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]

نوع یون به دام افتاده سه‌ترازی در شرایط یکسان برهم‌کنش، یون سه‌ترازی نوع نردبانی دارای درهم‌تنیدگی (آنتروپی) بیشتر و یون نوع Λ دارای درهم‌تنیدگی کمتری با میدان کوانتیده هستند.



شکل ۴: آنتروپی خطی برای یون به دام افتاده نوع Λ. سایر پارامترها عبارتند از $f(n_j)=\sqrt{n_j}$ ، $m=4$ ،$n_1=n_2=10$ و $g=10^4\ Hz$ و $\chi=10^3\ Hz$.

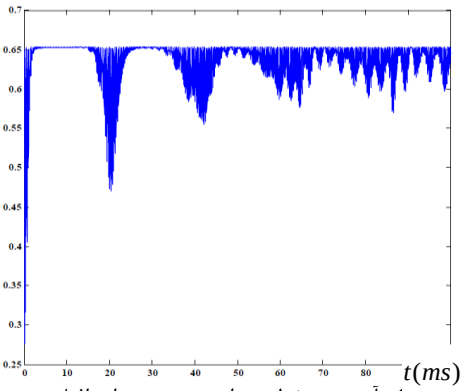


شکل ۵: آنتروپی خطی برای یون به دام افتاده نوع V. سایر پارامترها عبارتند از $f(n_j)=\sqrt{n_j}$ ، $m=4$ ،$n_1=n_2=10$ و $g=10^4\ Hz$ و $\chi=10^3\ Hz$.

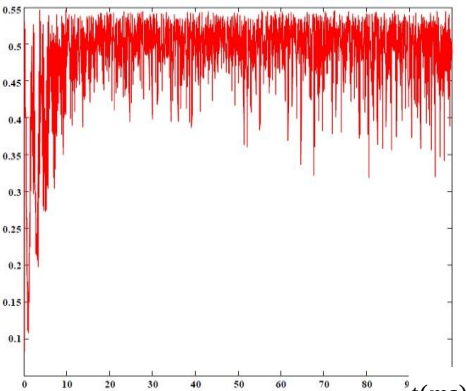
در شکل ۷ آنتروپی خطی یون به دام افتاده دوترازی در برهم‌کنش با یک میدان کوانتیده در شرایط یکسان با یون‌های سه‌ترازی موجود در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ رسم شده است. آن چه از این نمودار پیداست، این است که آنتروپی خطی از $t=0$ شروع شده و با داشتن یک رفتار نوسانی به مقدار بیشینه خود می‌رسد و سپس حول یک مقدار ثابت نوسانی می‌کند. آن‌چه در مقایسه نمودارهای ۴ تا ۷ قابل توجه است این است که در شرایط یکسان، تمامی یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی نسبت به نوع دوترازی بیشتر با میدان کوانتیده درهم‌تنیده می‌شوند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برهم‌کنش میان یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی را با میدان‌های کوانتیده دومدی مورد مطالعه قراردادیم. با بررسی میزان درهم‌تنیدگی بین انواع یون‌های سه‌ترازی با میدان کوانتیده دریافتیم که یون سه‌ترازی نوع نردبانی دارای بیشینه درهم‌تنیدگی (آنتروپی) و یون نوع Λ دارای کمینه درهم‌تنیدگی با میدان کوانتیده هستند. هم‌چنین، با مقایسه درهم‌تنیدگی میان یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی و دوترازی با میدان کوانتیده دریافتیم که یون‌های به دام افتاده سه‌ترازی نسبت به دوترازی، بیشتر با میدان کوانتیده درهم‌تنیده می‌شوند.



شکل ۶: آنتروپی خطی برای یون به دام افتاده نوع نردبانی. سایر پارامترها عبارتند از $f(n_j)=\sqrt{n_j}$ ، $n_1=n_2=10$ ، $m=4$ ، $g=10^4\ Hz$ و $\chi=10^3\ Hz$.



شکل ۷: آنتروپی خطی برای یون به دام افتاده دوترازی به ازای $f(n)=\sqrt{n}$ ، $n=10$ ، $m=4$ ، $g=10^4\ Hz$ و $\chi=10^3\ Hz$.

مراجع

[1] M. Sasura, V. Buzek, “Cold trapped ions as quantum information processors”, J. Mod. Opt., Vol. 49, No. 10, pp. 1593–1647, 2002.

[2] N. Yazdanpanah, M. K. Tavassoly, “Physical properties of a trapped two-level ion decaying by thermal and squeezed vacuum reservoirs” J. Mod. Opt. Vol. 63, No. 2, pp.111-125, 2016.

M.O. Scully, M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, p. 300 Cambridge University Press, 1997.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-01]