بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

طراحی عدسی شکل آزاد اپتیکی با استفاده از حل عددی معادله مانژ-آمپر

رضا شریفی هفشجانی، محمد واحدی

دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده فیزیک، گروه اتمی و مولکولی

با توجه به اهمیت طراحی قطعات اپتیکی شکل‌آزاد، همواره شاهد ارائه راهکارهای جدید در طراحی اپتیکی شکل‌آزاد هستیم که هرکدام به نحوی سعی بر بهبود روش‌های طراحی قبلی و یا ارائه روش‌های جدید دارند. یکی از روش‌ها حل معادلات دیفرانسیل است. اخیراً نشان داده شده است که می‌توان از حل معادله دیفرانسیل درجه دوم غیر خطی مانژ- آمپر در طراحی قطعات اپتیکی شکل آزاد بهره برد. در این پژوهش به دنبال طراحی عدسی شکل آزاد با کاربرد در حوزه روشنایی هستیم. این عدسی باید قادر باشد درخشش منبع نور موازی شده را به صورت الگوی از پیش تعیین شده به صفحه هدف انتقال دهد. در اینجا محاسبات مربوط به حل عددی معادله دیفرانسیل مانژ-آمپر را انجام داده شد و از این طریق ابر نقاط سطح شکل‌آزاد عدسی را بدست آوردیم. در ادامه با استفاده از نرم‌افزارهای مربوطه عدسی شکل آزاد بر اساس ابرنقاط بدست آمده طراحی شد. هسته مرکزی محاسبات عددی انجام شده برای بدست آوردن جواب معادله مانژ-آمپر را روش ریشه یابی نیوتون تشکیل می‌دهد. با این روش می‌توان در چند تکرار، ابر نقاط سطح شکل‌آزاد عدسی را بدست آورد

کلید واژه- عدسی شکل آزاد، معادله مانژ-آمپر، ابر نقاط، طراحی اپتیکی، روش نیوتون، مهندسی روشنایی

Designing freeform lens by using numerical solutions of Monge-Ampere equation

R. S. Hafshejani, M. Vahedi

Atomic & Molecular Physics Group, School of Physics, Iran University of Science and Technology

Abstract- Due to the importance of designing process of optical elements, novel methods are presented to improve the prior designing schemes. Recently, it has been shown that nonlinear second order partial differential equation of Monge-Ampere could be used in designing free-form optical elements. It has been tried to construct a freeform lens that is able to transfer received intensity distribution on the surface of the lens to the desired pattern on the target plane. The Newton linearization method has been used to solve the nonlinear equation. By use of Newton's method in the iteration loop, it's possible to reach to better results for freeform lens surface structure. By use of several iterations, we achieved improved points cloud of 3D shape of the freeform lens.

Keywords: freeform lens, Monge-Ampere equation, points cloud, optical design, Newton's method, illumination engineering

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

۱- مقدمه

اخیرا، اپتیک شکل آزاد در مهندسی روشنایی کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است[۱]. اپتیک شکل آزاد را می‌توان در ایجاد الگوهای روشنایی از پیش تعیین شده به کار برد. در حوزه مهندسی روشنایی روش‌های مختلفی برای طراحی این اپتیک‌ها پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها که در این پژوهش نیز مد نظر است، معادله دیفرانسیل مانژ-آمپر می‌باشد. در این پژوهش امکان بدست آوردن ابر نقاط سطح شکل‌آزاد عدسی موردنظر را با این روش بررسی می‌کنیم.

۲- طراحی عدسی شکل آزاد

با استفاده از عدسی با یک سطح شکل آزاد دسته پرتوهای منبع موازی شده را که دارای شدت درخشندگی $I(x,y)$ هستند، بگونه‌ای به سطح هدف انتقال می‌دهیم که در آنجا درخشش از پیش تعیین شدهٔ $E(t_x,t_y)$ حاصل شود.

در شکل(۱) ، $\vec{I}$ بردار یکه پرتو فرودی، $\vec{N}$ بردار یکه عمود بر سطح، $\vec{O}$ بردار یکه امتداد پرتو و T مختصات پرتو در صفحه هدف می‌باشند. همینطور z_x و z_y مشتق‌های مرتبه اول مولفه z نسبت به دو مولفه x و y هستند.

براساس شکل برداری قانون اسنل بین بردارهای یکه $\vec{I}$ ، $\vec{N}$ و $\vec{O}$ رابطه زیر برقرار است[۲].

$$n_o\vec{O}=n_i\vec{I}+P_1\vec{P} \qquad (۱)$$

در این رابطه پارامتر P_1 را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد[۳]:

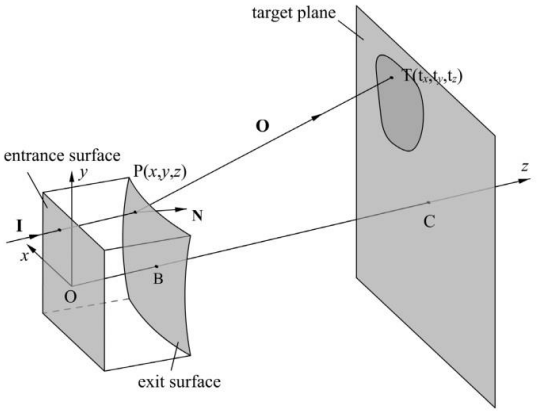
$$P_1=\frac{n_o\sqrt{(1-\frac{n_i^2}{n_o^2})(z_x^2+z_y^2)+1}-n_i}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}} \qquad (۲)$$

بردار $\vec{O}$ و مولفه‌های آن نیز بصورت زیر تعریف می‌شوند [۳]:

$$\vec{O}=\frac{1}{n_o\left(z_x^2+z_y^2+1\right)}\left(O_x,O_y,O_z\right) \qquad (۳)$$

شکل (۱) نمایی از شکست پرتو در سطح شکل آزاد عدسی [۳].

$$O_x=-z_x\left[n_o\sqrt{a(z_x^2+z_y^2)+1}-n_i\right] \qquad (۴)$$



$$O_y=-z_y\left[n_o\sqrt{a(z_x^2+z_y^2)+1}-n_i\right] \qquad (۵)$$

$$O_z=n_i(z_x^2+z_y^2)+n_o\sqrt{a(z_x^2+z_y^2)+1} \qquad (۶)$$

در این روابط $a=1-(n_i/n_o)^2$. با توجه به روابط بالا می‌توان مولفه‌های بردار T را بصورت زیر تعریف کرد[۳]:

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{t_x^2+t_y^2+t_z^2}}(t_x,t_y,t_z) \qquad (۷)$$

$$t_x=x-(z-t_z)\frac{O_x}{O_z}\ ,\ t_y=y-(z-t_z)\frac{O_y}{O_z} \qquad (۸)$$

با فرض عدم اتلاف انرژی می‌توان نوشت[۳]:

$$|J(T)|E(t_x(x,y),t_y(x,y))=I(x,y) \qquad (۹)$$

در این رابطه E درخشش از پیش تعیین شده سطح هدف است و $1/|J(T)|$، اشاره به گشودگی(یا فشردگی) یک دسته بسیار باریک از پرتوهای نور دارد و مقدار آن از رابطه زیر بدست می‌آید[۳]:

$$|J(T)|=\left(\frac{\partial t_x}{\partial x}\frac{\partial t_y}{\partial y}-\frac{\partial t_x}{\partial y}\frac{\partial t_y}{\partial x}\right) \qquad (۱۰)$$

با محاسبه دترمینان ماتریس ژاکوبین از طریق رابطه (۱۰) و قرار دادن آنها در رابطه (۹)، به یک معادله دیفرایسیل جزئی درجه دوم غیر خطی می‌رسیم که می‌توان آن را به فرم معادله دیفرانسیل مانژ-آمپر بیضوی نوشت[۳].

$$MA\,eq: F_{in}=A_1(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)+A_2z_{xx}+A_3z_{yy}+A_4z_{xy}+A_5=0 \qquad (۱۱)$$

در این رابطه ضرایب A_1 تا A_5 بصورت توابعی از z_x، z_y، z، I و E تعریف می‌شوند [۳].

اگر الگوی روشنایی را بصورت یک شبکه از نقاط در نظر بگیریم، رابطه (۱۱) حاکم بر نقاط داخلی این شبکه است. برای اینکه فرم طرح روشنایی نیز حفظ شود باید پرتوهای لبه عدسی به مرز طرح روشنایی منتقل شوند.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]

با داشتن رابطه (۱۱) و لحاظ کردن شرایط مرزی به یک مدل ریاضی برای طراحی عدسی با یک سطح شکل آزاد می‌رسیم[۳].

$$\begin{cases} F_{in} = A_1(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) + A_2 z_{xx} + A_3 z_{yy} \\ \quad + A_4 z_{xy} + A_5 = 0 \\ F_b = 0 : \begin{cases} t_x = t_x(x, y, z, zx, zy) \\ t_y = ty(x, y, z, zx, zy) \end{cases} : \partial S_1 \to \partial S_2 \end{cases} \quad (۱۲)$$

در اینجا F_b اشاره به معادله حاکم بر مرز دارد.

این مجموعه معادله را می‌توان با استفاده از یک روش عددی مناسب حل کرد. برای این منظور ابتدا معادله دیفرانسیل مانژ-آمپر بیضوی و معادله‌ای که برای شرایط مرزی نوشته ایم را گسسته می‌کنیم. با این کار شبکه‌ای از نقاط را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_1 = \{(x_i, y_j) | x = x_{\min} + ih_1, y = y_{\min} + jh_2, i = 0,1,..,u; j = 0,1,...,v\} \quad (۱۳)$$

در این شبکه بندی $h_1 = (x_{\max} - x_{\min})/u$ و $h_2 = (y_{\max} - y_{\min})/v$ به‌ترتیب فاصله نقاط شبکه از یکدیگر در راستای محور x و محور y می‌باشند.

تمام نقاط داخلی (نقاط درونS_1) باید معادله مانژ-آمپر را ارضاء کنند و تمام نقاط مرزی (نقاط روی مرز S_1) باید معادله شرایط مرزی را ارضاء کنند. به‌منظور یکسان شدن خطای تقریب در همه نقاط شبکه از تقریب خطای مرتبه دوم استفاده شده است.

بعد از گسسته سازی می‌توان برای بدست آوردن مقدار بهینه برای هر کدام از نقاط داخلی و نقاط مرزی از روش حل نیوتون استفاده کرد.

$$F(X_k) + F'(X_k)(X_{k+1} - X_k) = 0 \quad (۱۴)$$

در این رابطه X_k جواب‌های بدست آمده در تکرار kام، و X_{k+1} جواب های تکرار $k+1$ام هستند. $F'(X_k)$ نیز مشتق فریشه نسبت به تمام نقاط شبکه در تکرار kام است [۳-۵]. در این پژوهش با استفاده از ابزارهای محاسباتی به حل عددی این معادله پرداخته شد، تا به‌کمک آن بتوان عدسی شکل آزاد مورد نظر را طراحی کرد.

۳- نتایج محاسبات عددی و شبیه سازی

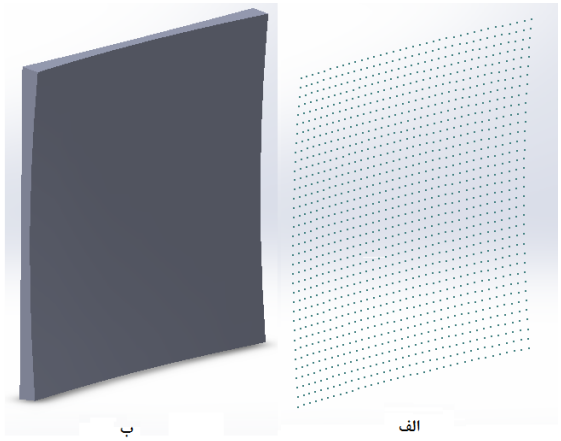
با استفاده از نرم‌افزار *GNU Octave* و تحت زبان برنامه نویسی متلب کد محاسباتی مربوطه برای بدست آوردن ابر نقاط سطح شکل‌آزاد عدسی مورد نظر ایجاد شد. با استفاده از نرم‌افزار *SolidWorks* عدسی مورد نظر طراحی شد. نهایتاً در محیط نرم‌افزار اپتیکی *TracePro* عدسی طراحی شده مورد ارزیابی قرار گرفت.

در مثال زیر کد محاسباتی باید ابر نقاط سطح عدسی را بگونه‌ای پیش‌بینی کند که عدسی حاصل قادر باشد بر روی پرده‌ای در فاصله t_z واژه **"علم"** را نمایش دهد؛ بطوریکه درخشش برای این واژه چهار برابر زمینه باشد. ضریب شکست عدسی(n_i) ۱,۳۷۶ و ضریب شکست محیط(n_o) نیز ۱ در نظر گرفته شده است. سایر پارامترهای مورد استفاده در طراحی در جدول زیر آمده‌اند:

جدول(۱) پارامترهای اولیه ثابت در طراحی

L_x	L_y	D_x	D_y	u	v	t_z
۱۰mm	۱۰mm	۵۰mm	۵۰mm	۸۰	۶۰	۵۰۰mm

در این جدول D_x و D_y ابعاد تصویر و L_x، L_y نیز ابعاد عدسی هستند. همچنین u تعداد سطر و v تعداد ستون‌های شبکه می‌باشند. فاصله عدسی از پرده نیز با t_z نشان داده شده است.

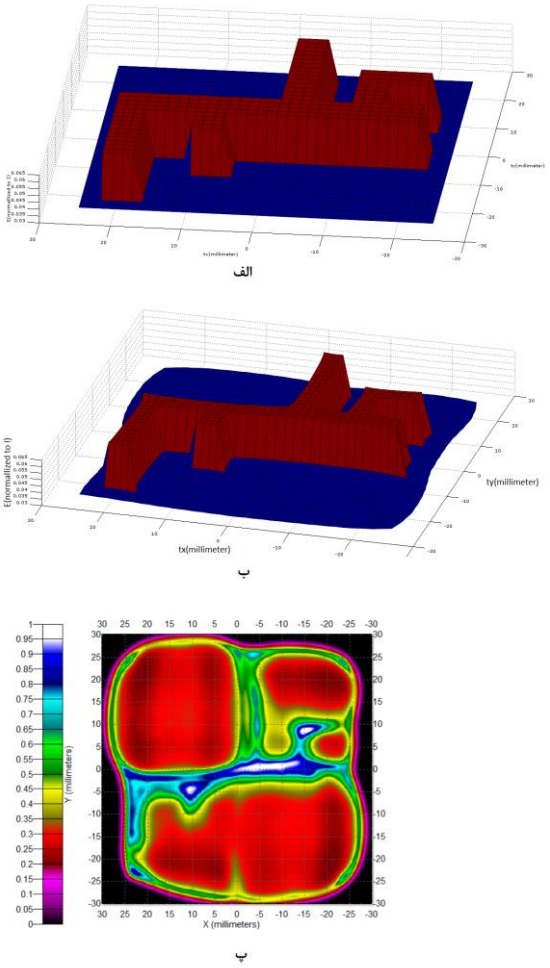


شکل(۲). الف) ابرنقاط سطح شکل آزاد عدسی، حاصل از محاسبات عددی ب) عدسی طراحی شده بر اساس این ابر نقاط

در مرحله اول با استفاده از روابط هندسی[۶]، یک جواب اولیه را برای سطح عدسی پیشنهاد می‌دهیم. جواب اولیه

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]



شکل(۳). الف) طرح مورد نظر. ب) پیش‌بینی حاصل از محاسبات عددی. پ) سنجش عدسی در نرم‌افزار تریس‌پرو

بگونه‌ای است که می‌تواند روی پرده درخشش یکنواخت ایجاد کند. بعد ار انجام محاسبات لازم، مطابق با رابطه (۱۴) با سه مرتبه تکرار جواب قابل قبولی برای ابر نقاط سطح شکل‌آزاد عدسی بدست آمد. این جواب عددی در واقع ابر نقاط سطح شکل‌آزاد عدسی را پیشنهاد می‌کند که قادر است الگوی خواسته شده (واژه **"علم"**) را مانند آنچه در شکل(۳-ب) مشاهده می‌شود، ایجاد کند.

با استفاده از این ابر نقاط، عدسی مورد نظر در نرم‌افزار *SolidWorks* طراحی شد. در انتها عدسی طراحی شده را در نرم افزار اپتیکی TracePro مورد ارزیابی قرار دادیم؛ که نتیجه آن در شکل(۳-پ) قابل مشاهده است.

۴- نتیجه گیری

مطابق با آنچه در شکل (۳-پ) قابل مشاهده است محاسبات عددی انجام شده به خوبی توانسته ابر نقاط سطح شکل آزاد عدسی را پیش‌بینی کند. نتایج شبیه سازی گواه این است که می‌توان از این روش محاسباتی در طراحی عدسی‌های شکل‌آزاد با کاربرد در مهندسی روشنایی استفاده برد. این محاسبات با در نظر گرفتن منبع نور ایده‌آل موازی انجام شده است، که می‌توان آن را با اعمال تغییراتی برای منابع نور نقطه‌ای نیز بکار برد.

۵- مراجع

[1] Fang, F., et al., *Manufacturing and measurement of freeform optics*. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2013. 62(2): p. 823-846.

[2] De Greve, B., *Reflections and refractions in ray tracing*. 2004, Preuzeto.

[3] Wu, R., et al., *A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping*. Optics express, 2013. 21(18): p. 20974-20989.

[4] Wu, R., et al., *Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampére equation method in freeform optics design*. Optics letters, 2014. 39(3): p. 634-637.

[5] Wu, R., et al. *The Monge-Ampère equation design method and its application to beam shaping*. Freeform Optics. 2015. Optical Society of America.

[6] Wu, R., et al., *Freeform lens arrays for off-axis illumination in an optical lithography system*. Applied optics, 2011. 50(5): p. 725-732.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2026-11-03]