بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

طرح‌واره نظری برای تولید فیزیکی حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده گروه‌های SU(1,1) و SU(2)

امیر کریمی[۱و۲] و محمد کاظم توسلی[۱و۳]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
[۲] گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، آباده، فارس
[۳] گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – اخیراً حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده با جایگزینی حالت‌های همدوس در حالت‌های همدوس درهم‌تنیده توسط حالت-های همدوس غیرخطی، معرفی شده‌اند. در این مقاله با ارائه یک طرح‌واره فیزیکی بر اساس برهم‌کنش تشدیدی یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک کاواک دومدی در حضور دو میدان کلاسیکی قوی، به تولید فیزیکی دو گروه از این حالت‌ها، یعنی حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده متناظر با گروه‌های SU(1,1) و SU(2) می‌پردازیم.

کلید واژه- حالت های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده، گروه‌های SU(1,1) و SU(2).

A Theoretical Scheme for Generation of a Class of SU(1,1) and SU(2) Entangled Nonlinear Coherent States

A. Karimi [1,2] and M. K. Tavassoly [1,3]

[1] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, University of Yazd, Yazd
[2] Department of Physics, Islamic Azad University of Abadeh, Fars
[3] Photonic & Research Group, Engineering Research Center, University of Yazd, Yazd

Abstract- Recently, the entangled nonlinear coherent states are introduced via replacing coherent states with nonlinear coherent states in entangled coherent states. In this paper, in order to generate the SU(1,1) and SU(2) entangled nonlinear coherent states, an appropriate scheme is presented. The scheme is based on the resonant interaction of a Λ-type three-level atom with the two cavity modes of a quantized field in the presence of two strong classical fields.

Keywords: Entangled nonlinear coherent states, SU(1,1) and SU(2) groups.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-30]

۱. مقدمه

برهم‌نهی و درهم‌تنیدگی، به عنوان ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه‌های کوانتومی، نقش مهمی را در فرایند اطلاعات کوانتومی در هر دو زمینه نظری و تجربی ایفا می‌کنند [۱]. در دو دهه اخیر طرح‌های مختلفی به منظور مطالعه و تولید حالت‌های غیرکلاسیکی سامانه‌های کوانتومی مورد بحث و پیشنهاد قرار گرفته است [۲]. به عنوان نمونه‌ای خاص از این حالت‌ها، حالت‌های همدوس درهم‌تنیده دومدی زوج و فرد به کمک حالت‌های همدوس $\{|\pm\alpha\rangle\}$ به شکل زیر تعریف شده است[۳]:

$$|\Psi_{\pm}\rangle_{ECS} = N_{ECS}(|\alpha\rangle_a|-\alpha\rangle_b \pm |-\alpha\rangle_a|\alpha\rangle_b) \quad (۱)$$

با جایگزین‌کردن حالت‌های همدوس در رابطه (۱) توسط حالت‌های همدوس غیرخطی، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده زوج یا فرد به دست می‌آید.

به طور کلی، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده به کمک دو حالت همدوس غیرخطی با دامنه‌های مشابه و اختلاف فاز $e^{i\theta}$ به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$|\Psi_{ENCS}\rangle = N_{ENCS} \times (|\alpha, f\rangle_1 |e^{i\theta}\alpha, f\rangle_2 \pm e^{i\varphi}|e^{i\theta}\alpha, f\rangle_1 |\alpha, f\rangle_2) \quad (۲)$$

که در آن حالت همدوس غیرخطی طبق رابطه زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$|\alpha, f\rangle = N_{NCS}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f(n)]!}{\sqrt{n!}}\alpha^n|n\rangle \quad (۳)$$

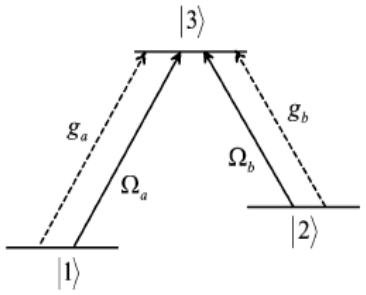
و ثابت N_{NCS} از شرط بهنجارش به‌دست می‌آید. اخیراً به بررسی وبژگی‌های غیرکلاسیکی حالت خاصی از این حالت‌ها پرداخته‌ایم [۵]:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha, f\rangle_1|-\alpha, f\rangle_2 + i|-\alpha, f\rangle_1|\alpha, f\rangle_2) \quad (۴)$$

هدف ما در این مقاله، ارائه یک طرح‌واره فیزیکی به منظور تولید دو ردهٔ خاص از این حالت‌ها است.

۲. تولید فیزیکی حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده

در این قسمت، با ارائه طرح‌واره‌ای بر اساس برهم‌کنش تشدیدی یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک کاواک دومدی در حضور دو میدان کلاسیکی قوی، به تولید فیزیکی دو ردهٔ ویژه از این حالت‌ها می‌پردازیم [۶]. این چینش آزمایشگاهی از یک تشدیدگر فابری-پرو، حمل‌کننده دو مد ناهمگن a و b کاواک و یک اتم سه‌ترازی نوع Λ تشکیل شده است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، درون کاواک، گذار دوقطبی بین دو حالت پایه $|1\rangle$ و $|2\rangle$ اتم سه‌ترازی ممنوع و گذار از حالت برانگیخته $|3\rangle$ به دو حالت با انرژی‌های کمتر مجاز می‌باشد. گذارهای $|1\rangle$ به $|3\rangle$ ($|2\rangle$ به $|3\rangle$) با مد a (b) کاواک با بسامد ω_a (ω_b) که توسط یک میدان کلاسیکی با دامنه g_a (g_b) و فاز φ_a (φ_b) برانگیخته شده، جفت شده است.



شکل۱- ترازهای اتمی یک اتم سه‌ترازی نوع Λ و برهم‌کنش با دو میدان کلاسیکی و دو مد کاواک.

با فرض اینکه مدهای کاواک و میدان‌های کلاسیکی با گذارهای اتمی متناظر، در حالت تشدید باشند، هامیلتونی سامانه اتم-میدان در تصویر برهم‌کنش به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H = H_{cav} + H_{cl}$$
$$H_{cl} = g_a(\sigma_{13}e^{i\varphi_a} + \sigma_{31}e^{-i\varphi_a}) + g_b(\sigma_{23}e^{i\varphi_b} + \sigma_{32}e^{-i\varphi_b})$$
$$H_{cav} = \Omega_a(\sigma_{13}A^{\dagger} + \sigma_{31}A) + \Omega_b(\sigma_{23}B^{\dagger} + \sigma_{32}B) \quad (۵)$$

که $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ شبه‌اسپینورهای پائولی اتمی، و A و $A^{\dagger}$ (B و $B^{\dagger}$) عملگرهای آفرینش و نابودی تغییرشکل یافته مد a (b) هستند که به شکل $A = af(n_a)$ و $A^{\dagger} = f(n_a)a^{\dagger}$ ($B = bf(n_b)$ و $B^{\dagger} = f(n_b)b^{\dagger}$) تعریف می‌شوند. در این مقاله پالس‌های لیزری قوی ($g_a, g_b \ll \Omega_a, \Omega_b$) مورد استفاده قرار می‌گیرند. به منظور توصیف دینامیک سامانه با میدان‌های کلاسیکی قوی، پایه‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{g_a^2 + g_b^2}}(g_b e^{-i\varphi_b}|1\rangle - g_a e^{-i\varphi_a}|2\rangle)$$
$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|3\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{g_a^2 + g_b^2}}(g_a e^{-i\varphi_a}|1\rangle + g_b e^{-i\varphi_b}|2\rangle)] \quad (۶)$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-30]

که در معادله ویژه‌مقداری زیر صدق می‌کنند:

$$H_{cl}\,|0\rangle = 0,\quad H_{cl}\,|\pm\rangle = \pm\sqrt{g_a^2+g_b^2}\,|\pm\rangle \qquad (۷)$$

عملگرهای H_{cl} و H_{cav} را بر اساس پایه‌های معرفی‌شده $|\pm\rangle$ و $|0\rangle$ به دست می‌آوریم و برای ساده‌سازی دینامیک سامانه، از تصویر برهم‌کنشی که از تبدیل زیر به‌دست می‌آید، استفاده می‌کنیم [۶]:

$$R = \exp[-i\sqrt{g_a^2+g_b^2}\,(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)t] \qquad (۸)$$

هامیلتونی متناظر با این تصویر تبدیل‌یافته از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$H' = R^{\dagger}HR - iR^{\dagger}\frac{dR}{dt} \qquad (۹)$$

با در نظر گرفتن محدوده لیزر قوی ($g_a, g_b \ll \Omega_a, \Omega_b$) تقریب RWA و حذف جملاتی با نوسان سریع در H'، هامیلتونی مؤثر H_{eff} به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{\Omega_a g_a}{2\sqrt{g_a^2+g_b^2}}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)(e^{-i\varphi_a}A^{\dagger}+e^{i\varphi_a}A) \\ &+ \frac{\Omega_b g_b}{2\sqrt{g_a^2+g_b^2}}(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)(e^{-i\varphi_b}B^{\dagger}+e^{i\varphi_b}B) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

عملگر تحول زمانی متناظر با هامیلتونی (۵)، از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۶]:

$$\begin{aligned} U(t) &= RU_{eff}(t) = R\exp\{-iH_{eff}t/\hbar\} \\ &= \exp[-it\sqrt{g_a^2+g_b^2}\,(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|)] \\ &\times\exp\{-it(|+\rangle\langle+|-|-\rangle\langle-|) \\ &\times[\frac{\Omega_a g_a}{2\sqrt{g_a^2+g_b^2}}(e^{-i\varphi_a}A^{\dagger}+e^{i\varphi_a}A) \\ &+\frac{\Omega_b g_b}{2\sqrt{g_a^2+g_b^2}}(e^{-i\varphi_b}B^{\dagger}+e^{i\varphi_b}B)]\} \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

هم اکنون، با عبور یک اتم سه‌ترازی از درون کاواک، حالت همدوس غیرخطی درهم‌تنیده را تولید می‌کنیم. برای این منظور اتم سه‌ترازی و میدان را ابتدا به‌ترتیب در حالت برانگیخته $|3\rangle$ و حالت‌های خلاء $|0\rangle_a|0\rangle_b$ فرض می‌کنیم. پس از خروج اتم از کاواک، با کنش عملگر تحول زمانی (۱۱) روی حالت سامانه اتم-میدان و درنظرگرفتن $\alpha = -it\frac{\Omega_a g_a e^{-i\varphi_a}}{2\sqrt{g_a^2+g_b^2}}$ و $\beta = it\frac{\Omega_b g_b e^{-i\varphi_b}}{2\sqrt{g_a^2+g_b^2}}$، حالت سامانه به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}e^{\alpha A^{\dagger}-\alpha^* A}e^{-\beta B^{\dagger}+\beta^* B}\,|+\rangle|0\rangle_a|0\rangle_b) \\ &+(e^{it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}e^{-\alpha A^{\dagger}+\alpha^* A}e^{\beta B^{\dagger}-\beta^* B}\,|-\rangle|0\rangle_a|0\rangle_b) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

به منظور حفظ ویژگی یکانی‌بودن عملگرهای جابجایی-گونه ظاهرشده در رابطه (۱۲) برای مدهای a و b، توابع غیرخطی ویژه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳. تولید فیزیکی رده‌ای خاص از حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده SU(1,1)

با در نظر گرفتن تابع غیرخطی متناظر با پتانسیل مثلثاتی اصلاح‌شده $V(x) = U_{\circ}\tan^2(bx)$ که $U_{\circ}$ شدت پتانسیل و b برد آن است، داریم [۷]:

$$f_1(n) = \sqrt{\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}(n+2\lambda-1)} \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه، Ω و μ به‌ترتیب بسامد میدان و جرم ذره هستند و متغیر λ توسط رابطه $\lambda(\lambda+1) = \frac{2\mu U_{\circ}}{\hbar^2 b^2}$ به شدت و برد پتانسیل مرتبط می‌شود (زیرنویس ۱ در $f_1(n)$ به حالت همدوس SU(1,1) اشاره دارد). روابط جابجایی برای عملگرهای تغییرشکل‌یافته متناظر به شکل زیر داده-می‌شود:

$$[A_1, A_1^{\dagger}] = \frac{\hbar b^2}{\mu\Omega}(n_a+\lambda),\quad [B_1, B_1^{\dagger}] = \frac{\hbar b^2}{\mu\Omega}(n_b+\lambda) \qquad (۱۴)$$

با تعریف $K_{1a}^{-} = \sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}A_1$، $K_{1a}^{+} = \sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}A_1^{\dagger}$ و $K_{1a}^{0} = n_a+\lambda$ ($K_{1b}^{-} = \sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}B_1$، $K_{1b}^{+} = \sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}B_1^{\dagger}$ و $K_{1b}^{0} = n_b+\lambda$) برای مد a (b)، روابط جابجایی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$[K_{1i}^{0}, K_{1i}^{\pm}] = \pm K_{1i}^{\pm},\ [K_{1i}^{-}, K_{1i}^{+}] = 2K_{1i}^{0},\ i = a,b \qquad (۱۵)$$

که صریحاً به جبر لی گروه SU(1,1) اشاره دارد. با استفاده از روش گیلمور-پرلوموف در ساختار مبتنی‌بر نظریهٔ گروهی حالت‌های همدوس، رابطه (۱۲) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}e^{\xi K_{1a}^{+}-\xi^* K_{1a}^{-}}e^{-\eta K_{1b}^{+}+\eta^* K_{1b}^{-}}\,|+\rangle|0\rangle_a|0\rangle_b) \\ &+(e^{it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}e^{-\xi K_{1a}^{+}+\xi^* K_{1a}^{-}}e^{\eta K_{1b}^{+}-\eta^* K_{1b}^{-}}\,|-\rangle|0\rangle_a|0\rangle_b] \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-30]

که در آن از روابط $\xi=\sqrt{\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}}\alpha$ و $\eta=\sqrt{\frac{\hbar b}{2\mu\Omega}}\beta$ استفاده کرده‌ایم[۸]. حال به‌راحتی می‌توان آزمود که:

$$\begin{aligned}|\eta_1(\alpha), f_1\rangle_a &= D_{f_1}(\alpha)|0\rangle_a = e^{\xi K_{1a}^{+}-\xi^{*}K_{1a}^{-}}|0\rangle_a \\ &= e^{\zeta K_{1a}^{+}}(1-|\zeta|^2)^{K_{1a}^{0}} e^{-\zeta^{*}K_{1a}^{-}}|0\rangle_a \\ &= (1-\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}|\eta_1(\alpha)|^2)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[f_1(n)]!}{\sqrt{n!}}\eta_1(\alpha)^n|n\rangle\end{aligned} \quad (۱۷)$$

و رابطه‌ای مشابه برای $|\delta_1(\beta), f_1\rangle_b$ که $\xi=\sqrt{\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}}\alpha$، $\zeta=\frac{\xi}{|\xi|}\tanh\xi$ و $\eta_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}\zeta$ برای مد a و $\eta=\sqrt{\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}}\beta$، $\gamma=\frac{\eta}{|\eta|}\tanh\eta$، $\delta_1(\beta)=\sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}\gamma$ برای مد b به‌کار رفته‌اند، رابطه (۱۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}|+\rangle|\eta_1(\alpha), f_1\rangle_a|-\delta_1(\beta), f_1\rangle_b) \\ &+(e^{it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}|-\rangle|-\eta_1(\alpha), f_1\rangle_a|\delta_1(\beta), f_1\rangle_b]\end{aligned} \quad (۱۸)$$

اگر اتم پس ازخروج از کاواک در حالت برانگیخته $|3\rangle$ باشد، سامانه در حالت زیر قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= N_{ENCS_1}[e^{-it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}|\eta_1(\alpha), f_1\rangle_a|-\delta_1(\beta), f_1\rangle_b) \\ &+(e^{it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}|-\eta_1(\alpha), f_1\rangle_a|\delta_1(\beta), f_1\rangle_b]\end{aligned} \quad (۱۹)$$

از آنجایی که احتمال موفقیت این رویداد $P_s=N_{ENCS}^{-2}$ می‌باشد، در نتیجه، تکرار این آزمایش به طور میانگین به تعداد P_s^{-1} بار، به تولید این حالت‌ها منتهی می‌شود.

۴. تولید فیزیکی رده‌ای خاص از حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده SU(2)

به عنوان مثالی دیگر از کاربرد رهیافت ارائه‌شده در این مقاله، به طور مختصر، تابع غیرخطی متناظر با تابع پتانسیل اصلاح‌شده پوش-تلر $V(x)=U_{\circ}\tanh^2(ax)$ را به شکل زیر درنظر می‌گیریم [۷]:

$$f_2(n)=\sqrt{\frac{\hbar a^2}{2\mu\Omega}(2s+1-n)} \quad (۲۰)$$

Ω و μ مشابه قسمت قبل و متغیر s توسط رابطه‌ای مشابه با متغیر λ تعریف می‌شوند (زیرنویس۲ در $f_2(n)$ به حالت همدوس SU(2) اشاره دارد). مشابه با روشی که در قسمت قبل منجر به تولید حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده SU(1,1) شد، با تعریف عملگرهای غیرخطی جدید و به‌دست آوردن روابط جابجایی برای عملگرهای غیرخطی تعریف‌شده، به جبر لی گروه SU(2) می‌رسیم. با استفاده از این جبر و تغییرمتغیرهای مناسب، رابطه‌ای مشابه با رابطه (۱۶) ظاهر می‌شود که پس از کنش عملگرهای جابجایی یکانی روی حالت‌های خلاء، حالتی مشابه با (۱۸) مرتبط با گروه SU(2) به دست می‌آید [۸]. پس از خروج اتم از کاواک در حالت برانگیخته $|3\rangle$، سامانه در حالت زیر قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= N_{ENCS_2}[e^{-it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}|\eta_2(\alpha), f_2\rangle_a|-\delta_2(\beta), f_2\rangle_b) \\ &+(e^{it\sqrt{g_a^2+g_g^2}}|-\eta_2(\alpha), f_2\rangle_a|\delta_2(\beta), f_2\rangle_b]\end{aligned} \quad (۲۱)$$

احتمال موفقیت این رویداد و تولید این حالت‌ها، از روابطی مشابه با آنچه درمورد گروه SU(1,1) گفته‌شد، به دست می‌آید.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از معرفی مختصر حالت‌های همدوس غیرخطی درهم تنیده، با ارائه طرح‌واره‌ای بر اساس برهم-کنش تشدیدی یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک کاواک دومدی در حضور دو میدان کلاسیکی قوی، به تولید فیزیکی این حالت‌ها پرداختیم و با درنظرگرفتن دو تابع غیرخطی $f_1(n)$ و $f_2(n)$ متناظر با دو پتانسیل فیزیکی معین دو ردهٔ خاص از حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده متناظر با گروه‌های SU(1,1) و SU(2) را تولید کردیم.

مراجع

[1] Barenco A, Dutch D, Ekert A and Jozsa R 1995 Phys. Rev. Lett. **74** 4083.

[2] Buek V, Barranco A V, Knight P L 1992 Phys. Rev. A **45** 6570.

[3] Yurke B and Stoler D 1987 Phys. Rev. A **35** 4846.

[4] Roy B and Roy P 2000 J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2** 65.

[5] کریمی، امیر و توسلی، محمدکاظم، ۱۳۹۲، کنفرانس فیزیک ایران.

[6] XuBo Zou and Mathis W 2005 Phys. Lett. A. 337 305.

[7] Sanchez O S and Recamier J 2011 J. Phys. A: Math. Theor. **44** 145307.

[8] Miry S R and Tavassoly M K 2012 Phys. Scr. **85** 035404.

[Downloaded from www.opsi.ir on 2025-07-30]