

درهم تنیدگی و وارونی جمعیت اتمی در برهم کنش بین دو اتم سه ترازی با دو میدان جفت شده

الهام فرجی^۱، محمد کاظم توسلی^۱ و حمید رضا باغشاهی^{۱،۲،۳}
^۱ گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد
^۲ آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی و رمزنگاری، دانشگاه یزد، یزد
^۳ گروه فیزیک، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده - در این مقاله، برهم کنش بین دو اتم یکسان سه ترازی نوع Λ با یک جفت میدان همدوس را در حضور ترم های مبدل (جفت شدگی میدان ها) مورد مطالعه قرار می دهیم. در واقع در این برهم کنش علاوه بر برهم کنش اتم ها و میدان، بین خود میدان ها نیز یک جفت شدگی وجود دارد. با استفاده از تبدیلات کانونی مناسب، هامیلتونی سامانه، به هامیلتونی تعمیم یافته مدل جینز-کامینگز برای برهم کنش دو اتم سه تراز با یک میدان جفت شده کاهش می یابد. پس از یافتن شکل صریح تابع موج سامانه اتم-میدان با استفاده از تبدیلات لاپلاس، به منظور بررسی ویژگی های غیر کلاسیکی حالت به دست آمده، آنتروپی خطی و وارونی جمعیت اتمی را با محاسبات عددی مورد ارزیابی قرار می دهیم.

کلید واژه - درهم تنیدگی، وارونی جمعیت، میدان های جفت شده، ویژگی های غیر کلاسیکی.

Entanglement and Atomic Population Inversion of Two Three-level Atoms Interacting with Two Coupled Fields

Elham faraji¹, Mohamad Kazem Tavassoly^{1,2} and Hamid Reza Baghshahi^{1,2,3}

¹ Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

² The Laboratory of Quantum Information Processing, Yazd University, Yazd

³ Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract- In this paper, we study the interaction of two identical Λ -type three-level atoms with a pair of coherent field in the presence of converter terms (coupled fields). Indeed, in addition to the interaction between the atoms and fields, the fields are interacting with each other, too. By applying the appropriate canonical transformations, the introduced model is reduced to a well-known form of the generalized Jaynes-Cummings model for the interaction between two three-level atoms and two coupled modes. After obtaining the explicit form of the atom-field wave function by using the Laplace transform technique, in order to examine the nonclassical properties of the obtained state, we evaluate the linear entropy and atomic population inversion, numerically.

Keywords: Entanglement, Population inversion, Coupled fields, Nonclassical properties.

۱- مقدمه

$\hat{a}_i (\hat{a}_i^\dagger), i=1,2$ رفتار می‌کنند و زاویه چرخشی ζ با توجه به ویژگی‌های هامیلتونی سامانه محاسبه می‌شود. تحت تبدیلات (۳)، شکل نهایی هامیلتونی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^2 \bar{\Omega}_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sum_{j=A_1, A_2} \left(\omega_1 |1^j\rangle \langle 1^j| + \omega_2 |2^j\rangle \langle 2^j| + \omega_3 |3^j\rangle \langle 3^j| \right), \quad (4)$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=A_1, A_2} i\lambda_1 \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \hat{\sigma}_{12}^j - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \hat{\sigma}_{21}^j \right) + i\lambda_1 \left(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \hat{\sigma}_{13}^j - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1 \hat{\sigma}_{31}^j \right) \quad (5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \Omega_1 \cos^2 \zeta + \Omega_2 \sin^2 \zeta - \lambda_2 \sin 2\zeta, \\ \bar{\Omega}_2 &= \Omega_2 \cos^2 \zeta + \Omega_1 \sin^2 \zeta + \lambda_2 \sin 2\zeta, \\ \zeta &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\lambda_2}{\Omega_2 - \Omega_1} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

حالت اولیه میدان را به صورت یک میدان دومدی جفت شده همدوس در نظر می‌گیریم [۳]:

$$|\xi, q\rangle = N^2 \sum_{n=0}^q Q_n |q-n, n\rangle, \quad (7)$$

که در آن N (ضریب بهنجارش) و Q_n به صورت‌های زیر داده می‌شوند:

$$N^{-2} = \sum_{n=0}^q |Q_n|^2, \quad Q_n = \xi^n \sqrt{\frac{(q-n)!}{q!n!}} \quad (8)$$

حالت اولیه اتم‌ها را نیز به صورت برهم‌نهی عامی از پایه‌های متشکل از ترازهای دو اتم در نظر می‌گیریم، به طوری که برای تابع موج سامانه کلی اتم-میدان در $t=0$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} |\psi(t=0)\rangle &= \sum_{n=0}^q \left(\gamma_1 |1,1\rangle + \gamma_2 (|1,2\rangle + |2,1\rangle) \right. \\ &\quad + \gamma_3 (|1,3\rangle + |3,1\rangle) + \gamma_4 (|2,3\rangle + |3,2\rangle) \\ &\quad \left. + \gamma_5 |2,2\rangle + \gamma_6 |3,3\rangle \right) \otimes |q-n, n\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

حال با در نظر گرفتن تابع موج کل سامانه در زمان t به صورت زیر

برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده تک‌مد، یکی از اساسی‌ترین مسائل در حوزه اپتیک کوانتومی است. ساده‌ترین مدل برای بررسی این برهم‌کنش، مدل جینز-کامینگز است [۱]. با توجه به اهمیت این موضوع، تعمیم‌های فراوانی از این مدل پیشنهاد شده است که انگیزه‌های بسیاری را برای پژوهش‌های نظری و تجربی فراهم می‌کند. در مقاله حاضر نیز با تعمیم این مدل، برهم‌کنش دو اتم یکسان سه‌ترازی نوع Λ با یک میدان دومدی جفت شده همدوس را معرفی می‌کنیم. با به دست آوردن تابع موج کل سامانه، برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی سامانه مانند درهم‌تنیدگی و وارونی جمعیت را با در نظر گرفتن شرایط اولیه متفاوت برای اتم‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲- حل تحلیلی تابع موج سامانه اتم-میدان

هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Λ با میدان کوانتیده دومدی جفت شده را بر اساس مدل تعمیم یافته جینز-کامینگز به صورت $\hat{H}_{\text{in}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ در نظر می‌گیریم به طوری که [۲]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \sum_{k=1}^2 \Omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j=A_1, A_2} \left(\omega_1 |1^j\rangle \langle 1^j| + \omega_2 |2^j\rangle \langle 2^j| + \omega_3 |3^j\rangle \langle 3^j| \right) \\ \hat{H}_1 &= \sum_{j=A_1, A_2} i\lambda_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{12}^j - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{21}^j \right) \\ &\quad + i\lambda_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_{13}^j - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_{31}^j \right) + \lambda_2 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن $|1\rangle, |2\rangle$ و $|3\rangle$ ترازهای اتمی با بسامدهای $\omega_3 < \omega_2 < \omega_1$ ، اندیس شمارنده اتم‌ها، j اندیس عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده اتمی، $\Omega_k (k=1,2)$ بسامدهای دو مد میدان، $\hat{a}_k^\dagger$ و $\hat{a}_k$ عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش مربوط به مد k ام، λ_1 ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان (که بدون کاستن از عمومیت مسئله برای هر دو اتم یکسان در نظر گرفته شده است) و بالاخره λ_2 ثابت جفت‌شدگی بین مدهای میدان در نظر گرفته شده است. وجود قسمت آخر در هامیلتونی منجر به پیچیدگی‌هایی در فرایند حل مسئله می‌شود، از این رو ابتدا تبدیلات کانونیک زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\hat{a}_1 = \hat{b}_1 \cos \zeta + \hat{b}_2 \sin \zeta, \quad \hat{a}_2 = \hat{b}_2 \cos \zeta - \hat{b}_1 \sin \zeta, \quad (11)$$

در این رابطه، عملگرهای $\hat{b}_i (\hat{b}_i^\dagger), i=1,2$ مشابه عملگرهای

$$C_5(q-n, n, t) = \frac{1}{2W_n^3} [Q_{n-1}(-(\gamma_2 + \gamma_3)V_n \times W_n^2 \sin(2W_n t) + \sqrt{2}(-\gamma_2 + \gamma_3)W_n^3 \sin(\sqrt{2}V_n t) + W_n[2Q_{n-2}\gamma_1 U_n V_n \sin^2(W_n t) + Q_n(-2\gamma_4 V_n^2 \sin^2(W_n t) + (\gamma_5 + \gamma_6)(U_n^2 + V_n^2 \cos^2(W_n t)) + (\gamma_5 - \gamma_6)W_n^2 \cos(\sqrt{2}V_n t))]]], \quad (15)$$

$$C_6(q-n, n, t) = \frac{1}{2W_n^3} [Q_{n-1}(-(\gamma_2 + \gamma_3)V_n \times W_n^2 \sin(2W_n t) + \sqrt{2}(\gamma_3 + \gamma_2)W_n^3 \sin(\sqrt{2}V_n t) + W_n[2Q_{n-2}\gamma_1 U_n V_n \sin^2(W_n t) + Q_n(-2\gamma_4 V_n^2 \sin^2(W_n t) + (\gamma_5 + \gamma_6)(U_n^2 + V_n^2 \cos^2(W_n t)) + (\gamma_6 - \gamma_5)W_n^2 \cos(\sqrt{2}V_n t))]]], \quad (16)$$

که در آن‌ها قرار داده‌ایم:

$$V_n = \lambda_1 \sqrt{n(q-n+1)}, \quad U_n = \lambda_1 \sqrt{(n-1)(q-n+2)}, \quad W_n = \sqrt{V_n^2 + U_n^2} \quad (17)$$

با مشخص شدن ضرایب بسط بالا (۱۶)-(۱۱)، تابع موج کل سامانه (۱۰) به دست می‌آید و با داشتن آن می‌توانیم ویژگی‌های فیزیکی سامانه را مورد ارزیابی قرار دهیم.

۲-۱- آنتروپی خطی

برای محاسبه در هم‌تنیدگی از آنتروپی خطی بهره می‌گیریم. افزایش (کاهش) آنتروپی خطی متناظر با افزایش (کاهش) درهم‌تنیدگی اتم-میدان است. با توجه به تابع موج (۱۰) می‌توان آنتروپی خطی را به صورت $S_{A_1 A_2} = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_{A_1 A_2}^2(t))$ (بیانگر درهم‌تنیدگی مجموعه دو اتم با میدان) تعریف کرد که در آن $\hat{\rho}_{A_1 A_2} = \text{Tr}_F(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$ بیانگر ماتریس چگالی کاهش‌یافته مربوط به دو اتم است [۵]. شکل‌های (۱) و (۲) درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را برای موردی که به ترتیب اتم‌ها در $t=0$ هر دو برانگیخته و یا برهم‌نهی از تمام پایه‌های اتمی باشد، نشان می‌دهد. با توجه به این دو نمودار مشخص است که در هر دو مورد، آنتروپی بین مقادیر بیشینه و کمینه‌اش نوسان می‌کند. هم‌چنین بیشینه درهم‌تنیدگی

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^q (C_1(q-n, n, t)|1, 1, q-n, n\rangle + C_2(q-n, n, t)(|1, 2, q-n, n\rangle + |2, 1, q-n, n\rangle) + C_3(q-n, n, t)(|1, 3, q-n, n\rangle + |3, 1, q-n, n\rangle) + C_4(q-n, n, t)(|2, 3, q-n, n\rangle + |3, 2, q-n, n\rangle) + C_5(q-n, n, t)|2, 2, q-n, n\rangle + C_6(q-n, n, t)|3, 3, q-n, n\rangle) \quad (10)$$

و حل معادله وابسته به زمان شرودینگر مربوطه $i \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_1 |\psi(t)\rangle$ و با استفاده از تکنیک تبدیلات لاپلاس، بعد از انجام محاسباتی طولانی، دامنه‌های احتمال تابع موج (۱۰) به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۴]:

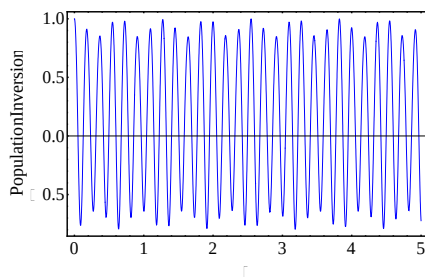
$$C_1(q-n+2, n-2, t) = \frac{1}{W_n^3} [(\gamma_2 + \gamma_3) \times U_n(U_n^2 + V_n^2)Q_{n-1} \sin(2W_n t) + W_n((2\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6)Q_n U_n V_n \sin^2(W_n t) + \gamma_1 Q_{n-2}(U_n^2 \cos(2W_n t) + V_n^2))] , \quad (11)$$

$$C_2(q-n+1, n-1, t) = \frac{1}{4W_n} [\sin(2W_n t)(-2\gamma_1 Q_{n-2} U_n + Q_n(2\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6)V_n) + 2Q_{n-1}W_n((\gamma_2 - \gamma_3)\cos(\sqrt{2}V_n t) + (\gamma_2 + \gamma_3)\cos(2W_n t)) + \sqrt{2}Q_n(\gamma_5 - \gamma_6)W_n \sin(\sqrt{2}V_n t)], \quad (12)$$

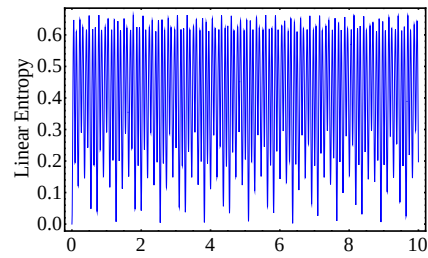
$$C_3(q-n+1, n-1, t) = \frac{1}{4W_n} [\sin(2W_n t)(-2\gamma_1 Q_{n-2} U_n + Q_n(2\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6)V_n) + 2Q_{n-1}W_n((\gamma_3 - \gamma_2)\cos(\sqrt{2}V_n t) + (\gamma_2 + \gamma_3)\cos(2W_n t)) + \sqrt{2}Q_n(\gamma_6 - \gamma_5)W_n \sin(\sqrt{2}V_n t)], \quad (13)$$

$$C_4(q-n, n, t) = \frac{1}{8W_n^3} e^{-2iW_n t} [2iQ_{n-1}(\gamma_2 + \gamma_3) \times (e^{4iW_n t} - 1)V_n W_n^2 + 4W_n e^{2iW_n t} [2Q_{n-2}\gamma_1 U_n V_n \sin^2(W_n t) + Q_n(-(\gamma_5 + \gamma_6)V_n^2 \sin^2(W_n t) + 2\gamma_4(U_n^2 + V_n^2 \cos^2(W_n t)))]], \quad (14)$$

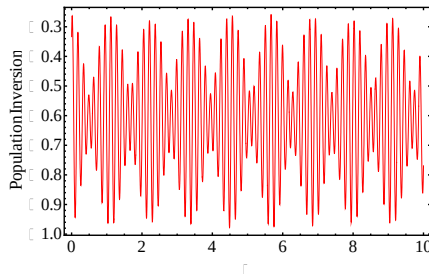
برای حالتی که دو اتم ابتدا در حالت برانگیخته باشند نسبت به حالت دیگر بیشتر است.



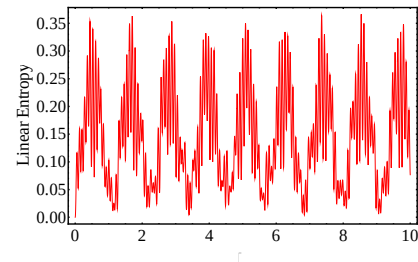
شکل ۳: وارونی جمعیت برحسب زمان مشخصه $\tau = \lambda_1 t$ به ازای $p = 100, \zeta = 3, \gamma_1 = 1, \gamma_i (i = 2, \dots, 6) = 0$.



شکل ۱: آنتروپی برحسب زمان مشخصه $\tau = \lambda_1 t$ به ازای $p = 100, \zeta = 3, \gamma_1 = 1, \gamma_i (i = 2, \dots, 6) = 0$.



شکل ۴: وارونی جمعیت برحسب زمان مشخصه $\tau = \lambda_1 t$ به ازای $p = 100, \zeta = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_6 = 1/3$.



شکل ۲: آنتروپی برحسب زمان مشخصه $\tau = \lambda_1 t$ به ازای $p = 100, \zeta = 3, \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_6 = 1/3$.

نتیجه گیری

در این مقاله برهم کنش بین دو اتم سه ترازوی و یک میدان جفت شده همدوس را در حضور برهم کنش دو میدان مورد بررسی قرار دادیم. با استفاده از تبدیلات کانونی مناسب و سپس استفاده از تکنیک تبدیل لاپلاس شکل صریح تابع موج سامانه اتم-میدان را به دست آوریم. با داشتن این تابع موج، درهم تنیدگی بین "دو اتم" و میدان و وارونی جمعیت اتمی را با در نظر گرفتن دو شرط اولیه متفاوت برای اتمها مورد بررسی قرار دادیم. نتایج نشان دهنده آن است که رفتار این دو ویژگی به شرط اولیه اتمها وابسته است. رهیافت به کار رفته طوری است که می توان تأثیر شرایط اولیه اتمی دیگر بر روی این دو پارامتر را بررسی و همچنین پارامترهای دیگری از قبیل تابع توزیع ویگنر، پارامتر مندل و ... را نیز مورد بررسی قرار داد که در این مختصر نمی گنجد.

منابع

- [1] Scully M.O. and Zubairy M.S., *Quantum Optics*, 3th edition, Cambridge Uni. Press, 2001.
- [2] Khalil E.K., *Optik* 124 (2013) 1820-1826.
- [3] Obada A.-S.F. and Khalil E.M., *Opt. Commun.* 260 (2006) 19-24.
- [4] Baghshahi H.R. and Tavassoly M.K., *Phys. Scr.* 89 (2014) 075101.
- [5] Agarwal G.S. and Biswas A., *J. Opt. B: Quantum Semiclassical* 7 (2005) 350.

۲-۲- وارونی جمعیت اتمی

وارونی جمعیت اتمی اول در برهم کنش دو اتم سه ترازوی نوع Λ با میدان به صورت تفاضل احتمالاتی که اتم در حالت برانگیخته و دو حالت پایه اش قرار دارد تعریف می شود [۴۲]. با توجه به نمودار سمت چپ شکل (۳) پیداست که وارونی جمعیت بین مقادیر مثبت و منفی نوسان می کند. ولی با توجه به نمودار سمت راست شکل (۳) می بینیم که وارونی جمعیت همواره منفی است. هم چنین پدیده های کوانتومی محض فروافت و باز یافت مناسبی در این شکل مشاهده می شود.

$$W(t) = \sum_{n=0}^q \left(|C_1(q-n+2, n-2, t)|^2 - (2|C_4(q-n, n, t)|^2 + |C_5(q-n, n, t)|^2 + |C_6(q-n, n, t)|^2) \right) \quad (17)$$

شکل های (۳) و (۴) وارونی جمعیت اتمی را به ازای حالتی که به ترتیب دو اتم در حالت برانگیخته و یا دو اتم در برهم نهی ای از تمام حالت های ممکن به کلاواک وارد شوند را نشان می دهد. از شکل (۳) پیداست که وارونی جمعیت بین مقادیر مثبت و منفی نوسان می کند. ولی با توجه به شکل (۴) می بینیم که وارونی جمعیت همواره منفی است. هم چنین پدیده های کوانتومی محض فروافت و باز یافت مناسبی در شکل (۴) مشاهده می شود.