بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

فرمول‌بندی نقش ماره‌ی توری‌های خطی چنگالی شکل با روش بردار شبکه‌ی وارون و بررسی کاربردهای آن

محمد یگانه[1] و سیف‌اله رسولی[۱و۲]

[1] دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، زنجان

[2] مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، زنجان

چکیده – یکی از روش‌های بررسی نقش ماره، استفاده از تحلیل فوریه در فضای فرکانسی است. در این روش، به‌جای تحلیل توزیع شدت طرح ماره، به بررسی توزیع فرکانس فضایی نقش ماره‌ی حاصل از برهم‌نهی توری‌ها پرداخته می‌شود. در این مقاله، نقش ماره‌ی توری‌های خطی چنگالی با رویکرد بردار شبکه‌ی وارون مورد بررسی قرار می‌گیرد. این روش در مقایسه با دیگر روش‌ها بسیار ساده است. همچنین در این کار، نقش ماره‌ی حاصل از توری‌های خطی چنگالی برای جابه‌جایی‌سنجی معرفی می‌شود. اثر دوران نسبی دو توری خطی چنگالی با تعداد انشعاب متفاوت نیز بررسی و نشان داده می‌شود که از آن می‌توان هم برای تعیین مشخصات خود توری‌ها استفاده کرد و هم نقش توری چنگالی با گام متغیر ایجاد نمود.

کلید واژه- ماره، توری چنگالی، جابه‌جایی‌سنجی.

Formulation of Linear L-Fork Gratings' Moiré Pattern using Reciprocal Vector and investigation of its applications

Mohammad Yeganeh[1] and Saifollah Rasouli[1, 2]

[1] Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran,

[2]Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran.

Abstract- Use of Fourier frequency domain is one of the usual methods for studying moiré pattern. In this method, spatial frequency spectrum of the moiré pattern instead of its intensity profile is used. Comparing with other methods, this method is very simple. In this work, we present a formulation for the moiré pattern of superimposing two linear l-fork gratings using reciprocal vector approach. For this kind of moiré pattern some applications are presented such as 2D displacement measurement. In addition, effect of changing relative angle of the grating lines is investigated and we find that it is possible to extract the topological defects of the gratings by the moiré technique. Finally, we introduced a simple way for variable frequency l-fork shape patterns generation by superimposing of two rotating l-fork gratings.

Keywords: moiré, l-fork grating, displacement measurement.

۱- مقدمه

یکی از روش‌های بررسی نقش ماره، استفاده از تحلیل فرکانسی است. در این روش، به‌جای تحلیل توزیع شدت طرح ماره، به بررسی توزیع فرکانس فضایی نقش ماره‌ی حاصل از برهم‌نهی توری‌ها پرداخته می‌شود. تحلیل فرکانسی نقش ماره‌ی ناشی از برهم‌نهی چند توری با این روش بسیار ساده است[۱]. در این کار، نقش ماره‌ی توری‌های چنگالی مورد بررسی قرار می‌گیرد و همچنین جابه‌جایی‌سنجی و اثر دوران نسبی دو توری برای تولید توری‌های چنگالی با گام متغیر ارائه می‌شود. پیش‌تر از این روش برای تحلیل نقش ماره توری‌های خطی استفاده شده است[۱] که در این مقاله تعمیم این روش برای برهم‌نهی توری‌های چنگالی برای اولین بار ارائه می شود. می‌توان از این روش به‌منظور بررسی نقش ماره‌ی برهم‌نهی توری‌های منطقه‌ای دارای نقص توپولوژیکی نیز بهره برد.

۲- تئوری

فرمول‌بندی نقش ماره‌ی ناشی از برهم‌نهی دو توری، از ضرب تابع عبور آن دو به‌دست می‌آید. تابع عبور توری‌های برهم نهی شده را می‌توان بر حسب مختصات مکانی و یا برحسب فرکانس‌های فضایی ساختار توری‌ها نوشت. تابع عبور هریک از توری‌های دو بعدی را در فضای مکان می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$t_i(\vec{r}) = \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} c_m \exp\left[jm_i\vec{G}_i.\vec{r}\right], \qquad i=1,2. \qquad (۱)$$

که $\vec{r}$ بردار مکان روی سطح هر توری، i شماره‌ی هر یک از توری‌ها و $\vec{G}_i = \frac{2\pi}{\Lambda_x}\hat{x}_0 + \frac{2\pi}{\Lambda_y}\hat{y}_0$ بردار شبکه‌ی وارون آن‌هاست. Λ_x و Λ_y تصویر گام توری‌ها در راستای محورهای مختصات و c_mها ضرایب بسط هستند. با گرفتن تبدیل فوریه از تابع فوق، می‌توان تابع عبور فرکانسی توری‌ها را به‌صورت زیر نوشت

$$T_i(\vec{G}) = \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} C_{m_i}\delta(\vec{G} - m_i\vec{G}_i), \qquad i=1,2. \qquad (۲)$$

که در آن δ پاسخ ضربه برای فرکانس توری است. در برهم‌نهی دو توری، تابع عبور برآیند، از ضرب توابع عبور آن‌ها به‌دست می‌آید $(t(\vec{r}) = t_1(\vec{r}).t_2(\vec{r}))$ و طیف فرکانسی $T(\vec{G})$، حاصل جمع پاسخ ضربه‌ی مؤلفه‌های فرکانسی توری‌ها است، یعنی

$$T(\vec{G}) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty} C_{m_1,m_2}\delta(\vec{G} - [m_1\vec{G}_1 + m_2\vec{G}_2]). \qquad (۳)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا، دیده می‌شود که فرکانس فضایی نور عبوری از دو توری، شامل مجموعه فرکانس‌های فضایی زیر است

$$\vec{G} = m_1\vec{G}_1 + m_2\vec{G}_2, \qquad m_1, m_2 \in Z. \qquad (۴)$$

این نتیجه برای تعداد بیشتری از توری‌ها نیز قابل تعمیم است. فرکانس فضایی نقش ماره از تفاضل بردارهای شبکه‌ی وارون دو توری بدست می‌آید ($m_1 = -m_2 = \pm 1$) که نمایانی فریزهای آن‌ها در داخل دایره‌ی نمایانی دستگاه تصویرساز قرار می‌گیرد[۱]

$$\vec{G}_{moiré} = \left|\vec{G}_1 - \vec{G}_2\right|. \qquad (۵)$$

درصورتی که فرکانس‌های مرتبه‌های بالاتر نیز در محدوده‌ی دایره‌ی نمایانی قرار گیرند، می‌توان طرح ماره‌ی آن‌ها را نیز مشاهده کرد.

اگر تابع عبور توری به مختصات فضایی سطح آن وابسته باشد، با تعریف $g(x,y)$ به‌صورت: $g(x,y) = \vec{G}_i(x,y).\vec{r}$ برای هرنقطه از یک ساختار شبه‌دوره‌ای، فرکانس فضایی را می‌توان از جمله‌ی اول بسط رابطه‌ی ۱ به‌صورت زیر بدست آورد

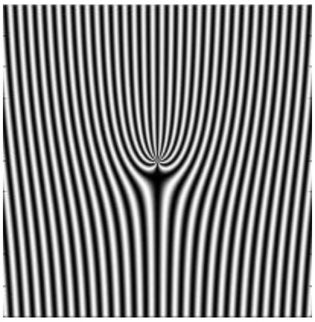
$$\vec{G}_i(x,y) = \left[\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\hat{x}_0 + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\hat{y}_0\right], \qquad (۶)$$

که در آن $\hat{x}_0$ و $\hat{y}_0$ بردارهای یکه در راستای محورهای x و y است. با درنظرگرفتن جملهٔ اول بسط در رابطه‌ی۱ در نمایش اویلر، تابع عبور توری از رابطه‌ی زیر به‌دست خواهد آمد

$$t'(x,y) = t_0\, e^{jg(x,y)} \Rightarrow \vec{G}_i(x,y) = -j\frac{\overrightarrow{\nabla t'}(x,y)}{t'(x,y)} \qquad (۷)$$

۲-۱- توری چنگالی

الگوی ناشی از تداخل دو جبهه‌ی موج نور تخت که زاویه‌ی کمی نسبت به یکدیگر دارند، در روی صفحه‌ی عمود بر راستای انتشارشان، خطوط موازی است. اگر یکی از این پرتوها، موج لاگر-گوسی باشد، به‌جای الگوی خطی ساده، الگوی خطی با ناجایگزیدگی چنگالی‌شکل ایجاد می‌شود. گام چنین الگویی از یک نقطه‌ی مرکزی تغییر می‌کند که به این نقطه، نقطه‌ی انشعاب (branch point) گفته می‌شود (شکل۱). چنین ساختاری، اگر به‌عنوان توری فازی یا شدتی به‌کار رود، می‌تواند برای بازتولید همان پرتو لاگر-گوسی اولیه از یک جبهه‌ی موج تخت استفاده شود.



شکل ۱: طرح توری چنگالی با تعداد انشعاب $l = 5$

معادله‌ی چنین توری که به آن توری چنگالی می‌گوییم، به‌صورت زیر است [۲]

$$t(x,y) = t_0 \exp\left[2\pi j \frac{x}{\Lambda} - jl\phi\right], \tag{۸}$$

که در آن φ مختصه‌ی زاویه‌ی سمتی در دستگاه استوانه‌ای و Λ گام توری در فواصل دور از مرکز توری است. l عدد صحیحی است که معادل بار توپولوژیکی پرتو لاگر-گوسی مولد توری است؛ همچنین l تعداد انشعابات خطوط توری از نقطه‌ی مرکزی آن‌را تعیین می‌کند. بردار شبکه‌ی وارون این توری با استفاده از رابطه‌ی ۷ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\vec{G} = \frac{2\pi}{\Lambda}\hat{x}_0 - \frac{l}{\rho}\hat{\varphi}_0, \tag{۹}$$

که $\hat{\varphi}_0$ بردار یکه در راستای زاویه‌ی سمتی و ρ مختصه‌ی شعاعی است. اگر توری چنگالی به‌اندازه‌ی $\frac{\alpha}{2}$ در صفحه‌ی xy درجهت مثلثاتی دوران کند، این بردار به‌صورت زیر تغییر می‌یابد

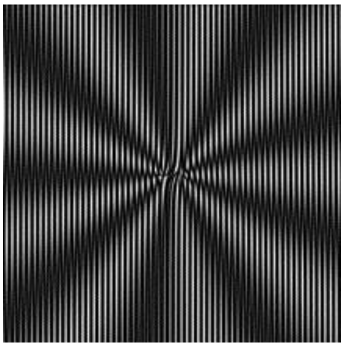
$$\vec{G}_{\alpha/2} = \frac{2\pi}{\Lambda}(\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\hat{x}_0 - \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\hat{y}_0) - \frac{l}{\rho}\left[\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\hat{\varphi}_0 + \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\hat{\rho}_0\right]. \tag{۱۰}$$

۲-۲- جابه‌جایی‌سنجی

دو توری چنگالی که مراکز آن‌ها بر هم منطبق و $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_0$ و $l_1 \neq l_2$ است را درنظر می‌گیریم. برای اینکه نقش ماره‌ی ناشی از برهم‌نهی آن دو را بررسی کنیم، با استفاده از روابط ۵ و ۹، $\vec{G}_{moiré}$را محاسبه می‌کنیم؛ داریم

$$\vec{G}_{moiré} = \frac{l_2 - l_1}{\rho}\hat{\varphi}_0. \tag{۱۱}$$

عبارت فوق، همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، در فواصل دورتر از مراکز دو توری، دارای یک طرح کلی پره مانند است که با توجه به اینکه فرکانس فضایی آن در راستای زاویه‌ی سمتی $f = \frac{l_2 - l_1}{2\pi\rho}$ است، تعداد پره‌ها در آن برابر $N = 2\pi\rho \times f = l_2 - l_1$ خواهد شد.



شکل ۲: نقش ماره‌ی ناشی از برهم‌نهی دو توری چنگالی با گام برابر که راستای کلی خطوط آن‌ها با هم موازی است و $l_1 = 5$ و $l_2 = -4$. تعداد پره‌ها یا فریزهای ماره در این نقش $|l_2 - l_1| = 9$ است.

از آنجا که با حرکت نسبی توری‌ها به طول یک گام(Λ_0) در راستای $\hat{x}_0$ نباید الگوی فوق در فواصل دور از مراکز دو توری تغییر کند، لذا نقش ماره به‌اندازه‌ی $(l_2 - l_1)^{-1}$ دور حول خط المرکزین دو توری خواهد چرخید. بنابراین با کاهش مقدار $l_2 - l_1$ یا کاهش گام توری‌ها، مقدار زاویه‌ی

دوران افزایش خواهد یافت. چون این نقش ماره حرکت انتقالی توری‌ها را به چرخش زاویه‌ای فریزهای ماره تبدیل می‌کند، می‌توان کاربردهای متنوعی برای آن ارائه داد.

۲-۳- بررسی اثر دوران نسبی دو توری

مطابق رابطه‌ی ۱۰ اگر دو توری با گام مشابه، ولی با عدد تکینگی متفاوت $(l_1 \neq l_2)$، نسبت به‌هم به‌اندازه‌ی زاویه‌ی $|\alpha| << 1$ بچرخند، بردار وارون شبکه‌ای آنها $\vec{G}_1 = \vec{G}_{\alpha/2}, \vec{G}_2 = \vec{G}_{-\alpha/2}$ خواهد بود که از رابطهٔ ۱۰ محاسبه می‌شود. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۵ برای طرح ماره خواهیم داشت

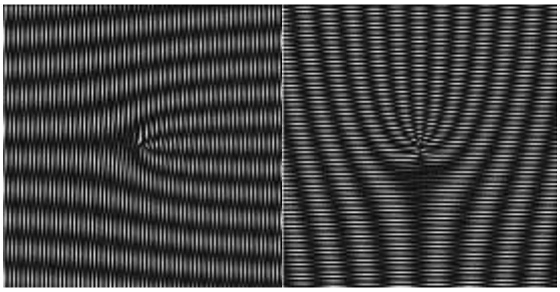
$$\vec{G}_{moiré} = 2\pi\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\Lambda_0}\right)\hat{y}_0 - \frac{l_1-l_2}{\rho}\cos\frac{\alpha}{2}\,\hat{\varphi}_0 + \frac{l_1+l_2}{\rho}\sin\frac{\alpha}{2}\,\hat{\rho}_0 \qquad (۱۲)$$

جمله‌ی اول بیان‌گر شکل کلی نقش ماره است که مشابه نقش ماره‌ی چرخشی توری‌های رانکی با گام $\Lambda = \Lambda_0 / 2\sin\frac{\alpha}{2}$ است که راستای تناوب آن در راستای محور yها می‌باشد. اگر جمله‌ی دوم این رابطه را در زوایای کوچک با جمله‌ی دوم رابطه‌ی ۹ مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم که نقش ماره نیز یک طرح چنگالی با تعداد انشعاب $(l_1 - l_2)$ است.جمله‌ی سوم در طرح چنگالی بی‌تأثیر است و آن‌را بررسی نمی‌کنیم.

اگر $\alpha = \pi + \theta$ و $|\theta| << 1$ باشد، با توجه به اینکه داریم: $\begin{cases}\cos(\pi/2 \pm \theta/2) = \mp\sin(\theta/2)\\ \sin(\pi/2 \pm \theta/2) = \cos(\theta/2)\end{cases}$ برای نقش ماره که این‌بار $\vec{G}_1 = \vec{G}_{-\theta/2}, \vec{G}_2 = \vec{G}_{\theta/2}$ در رابطه‌ی ۱۰ است خواهیم داشت:

$$\vec{G}_{moiré} = 2\pi\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\Lambda_0}\right)\hat{x}_0 - \frac{l_1+l_2}{\rho}\sin\frac{\theta}{2}\,\hat{\varphi}_0 - \frac{l_1-l_2}{\rho}\cos\frac{\theta}{2}\,\hat{\rho}_0 \qquad (۱۳)$$

این‌بار تناوب کلی نقش ماره در راستای محور xها و با گام $\Lambda = \Lambda_0 / 2\sin\frac{\theta}{2}$ است و طرح چنگالی دارای تعداد انشعاب $(l_1 + l_2)$ خواهد بود. عملاً وقتی هریک از توری‌ها به‌اندازه‌ی $\pi/2$، یکی در جهت مثبت و دیگری در جهت منفی مثلثاتی بچرخند، الگوی خطوط آن‌ها نیز $\pi/2$ خواهد چرخید و راستای کلی نقش ماره نیز همین مقدار خواهد چرخید. اما، اگر جهت انشعاب خطوط طرح چنگالی قبل از دوران برای دو توری یکسان باشد، بعد از دوران در خلاف جهت هم قرار خواهند گرفت و به همین علت بعد از دوران به‌جای جمع انشعابات دو توری، تفاضل آن‌ها ظاهر خواهد شد (شکل ۳).



شکل ۳: نقش ماره‌ی ناشی از برهم‌نهی دو توری چنگالی با دوران زوایای نسبی راست: $\alpha << 1$ و چپ: $\pi - \alpha << 1$. توری‌ها دارای تعداد انشعاب $l_1 = 5$ و $l_2 = 2$ هستند.

۳- نتیجه‌گیری

در این کار، نقش ماره توری‌های چنگالی به‌عنوان ابزاری برای جابه‌جایی سنجی دو بعدی معرفی شد. نشان داده شد که نقش ماره‌ی ناشی از برهم نهی دو توری چنگالی هنگامی‌که دوران نسبی ندارند یک طرح چند پره‌ای است که دراثر جابه‌جایی نسبی توری‌ها در راستای تناوبشان، می‌چرخد و سرعت و جهت دوران آن با اختلاف تعداد انشعابات دو توری نسبت عکس دارد. همچنین نشان داده شد که اگر دو توری چنگالی نسبت به هم بچرخند، طرح چنگالی با یک بزرگ‌نمایی کلی مشاهده خواهد شد که در زوایای کوچک، تعداد انشعاب آن با تفاضل، و در زوایای نزدیک به ۱۸۰ درجه، با جمع تعداد انشعابات دو توری برابر است. از این نتایج می‌توان برای مطالعه‌ی ساختار توری‌های چنگالی بهره برد. همچنین می‌توان از روی‌هم‌نهی دو توری چنگالی، ساختار چنگالی جدید با گام متغیر ایجاد کرد.

مراجع

[1] Isaac, Amidror, *The Theory of the Moiré Phenomenon, Volume I: Periodic Layers, Second Edition*, Sec. 6, Springer-Verlag London Limited, 2009.

[2] J. Arlt , K. Dholakia, L. Allen and M. J. Padgett, "*The production of multiringed Laguerre–Gaussian modes by computer-generated holograms*", J. of Mod. Opt., 45 (1998) 1231.