



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



## تابش چرنکوف در محیط پاشنده‌ی اتلافی و تقویت کننده

سمیرا سادات نوری‌زاده<sup>۱\*</sup> مرتضی سلطانی<sup>۲</sup>

اصفهان خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه فیزیک

چکیده – وقتی ذره‌ای با سرعت ثابت بیش از سرعت فاز نور در محیط حرکت کند، تابش مخروطی شکل موسوم به تابش چرنکوف به وجود می‌آید. در این مقاله محیط را پاشنده در نظر می‌گیریم و به شکل کوانتومی توان تابشی را در این محیط محاسبه می‌کنیم. نشان خواهیم داد اتلافی بودن یا تقویت کننده بودن محیط چطور می‌تواند روی تابش چرنکوف اثر بگذارد. در آخر نشان خواهیم داد که اگر محیط را تقویت کننده در نظر بگیریم به جای این که تابش داشته باشیم، الکترون تابش را جذب می‌کند.

کلید واژه – تابش چرنکوف، محیط پاشنده‌ی اتلافی، محیط تقویت کننده.

## Cherenkov radiation in presence of dissipative and amplifying media

Samira Sadat Nourizadeh, Morteza Soltani

Esfahan, Hezar Jerib Av., Esfahan University, Physics Department

We have the Cherenkov radiation when a particle moves with a velocity faster than the phase velocity in the medium which is appeared as a Cherenkov cone. In this work we consider the quantum Cherenkov radiation in a dissipative media and we will calculate the effect of lost and gain on Cherenkov radiation numerically. We will show that the lost decrees the Cherenkov radiation and also gain can inverse radiation.

Keywords: Cherenkov radiation, dissipative media, gain

## ۱- مقدمه

وقتی ذره بارداری درون محیط مادی با سرعت ثابت بیش از سرعت فاز نور در محیط حرکت کند نوری ساطع می‌شود که مخروطی شکل است. تابش اولین بار توسط چرنکوف مشاهده شده است [1] و محاسبات نظری آن اولین بار توسط تام و فرانک انجام شد. آن‌ها با استفاده از حل معادلات الکترودینامیک در محیط، شدت تابش بر واحد زمان را با استفاده از شار بردار پوینتینگ روی سطح استوانه‌ای که مسیر الکترون را احاطه کرده بود به دست آوردند. وقتی ذره باردار درون محیط حرکت می‌کند چگالی جریانی به وجود می‌آید که منجر به تولید میدان الکترومغناطیسی می‌شود. در این مقاله با استفاده از رهیافت کوانتش میدان و معرفی عملگرهای کوانتومی، پتانسیل برداری را به شکل کوانتومی به دست آورده و با استفاده از قاعده طلایی فرمی، شدت تابشی را محاسبه می‌کنیم [2]، سپس با تعمیم این مدل به محیطی پاشنده و با استفاده از مدل نوسانگر لورنتس نشان می‌دهیم که در حالت‌های مختلف میزان شدت تابشی چطور به ضریب میرایی محیط وابسته است، البته باید به این نکته توجه کرد که در صورت جاذب بودن محیط تابش چرنکوف توسط محیط جذب می‌شود، به عبارتی ابتدا به علت تابش چرنکوف انرژی مکانیکی الکترون به تابش الکترومغناطیسی تبدیل می‌شود، سپس نور منتشر شده توسط محیط پاشنده جذب می‌شود. در این مدل محیط را هم به شکل جاذب و هم به شکل تقویت کننده بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم در صورتی که محیط جاذب باشد تابش چرنکوف ضعیف می‌شود و در صورتی که محیط را تقویت کننده در نظر بگیریم تابش چرنکوف معکوس می‌شود به شکلی که باعث شتابدار شدن ذره باردار می‌شود.

## ۲- تابش چرنکوف

ذره‌ی باردار به جرم  $m$  و بار الکتریکی  $e$  در محیط خطی و همگن با سرعت ثابت در حال حرکت است و چگالی جریان خارجی به وجود می‌آورد که منجر به ایجاد میدان الکترومغناطیسی می‌شود. با استفاده از رهیافت هانتز و بارت و با توجه به شرایط محیط لاگرانژی زیر را تعریف می‌کنیم [3].

$$\begin{aligned} L = & \sum_{\lambda=1}^3 \int d\omega \int d^3k \left( |\underline{X}_{\omega\lambda}|^2 - \omega^2 |\underline{X}_{\omega\lambda}|^2 + |\underline{Y}_{\omega\lambda}|^2 - \omega^2 |\underline{Y}_{\omega\lambda}|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{r}_{\alpha}^2(t) + \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left( \epsilon_0 |\underline{A}_{\lambda}|^2 - \frac{|k \underline{A}_{\lambda}|^2}{\mu_0} \right) \\ & + \int d^3k \left( \underline{A}_{\lambda} \underline{J}_{\lambda}^{*+}(k, t) + h.c. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \left[ (-\underline{A}_{\lambda} \underline{P}_{\lambda}^{*+}(k, t) \right. \\ & \left. + (ik \times (\underline{A}_{\lambda} \hat{e}_{\lambda}(k)) \underline{M}^*(k, t)) + h.c. \right] \\ & + \int d^3k \left( \frac{(ik \cdot \underline{P}) \rho^*}{\epsilon_0 |k|^2} + h.c. \right) - \int d^3k \frac{|\rho|^2}{\epsilon_0 |k|^2} \\ & - \int d^3k \left( \frac{|(ik \cdot \underline{P})|^2}{\epsilon_0 |k|^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

با استفاده از لاگرانژی (۱) هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم. با رهیافت کوانتش کانونیک میدان الکترومغناطیسی، متغیرهای دینامیکی را بر اساس عملگرهای کوانتومی تعریف می‌کنیم و هامیلتونی را بر حسب عملگرهای کوانتومی می‌نویسیم. هامیلتونی سامانه کل شامل دو بخش است، یک بخش برهم-کنشی میدان الکترومغناطیسی و میدان‌های محیط و یک بخش غیر برهم‌کنشی الکترون آزاد است، که به این شکل تعریف می‌شود.

$$H = H_0 + H_{int} \quad (2)$$

$$H_0 = H_{ele} + H_F \quad (3)$$

$$H_{ele} = \frac{P^2}{2m} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H_F = & \sum_{\lambda=1}^3 \int d\omega \int d^3k \hbar \omega \{ d_{\lambda}^{\dagger}(k, \omega, t) d_{\lambda}(k, \omega, t) \\ & + b_{\lambda}^{\dagger}(k, \omega, t) b_{\lambda}(k, \omega, t) \} \end{aligned} \quad (5)$$

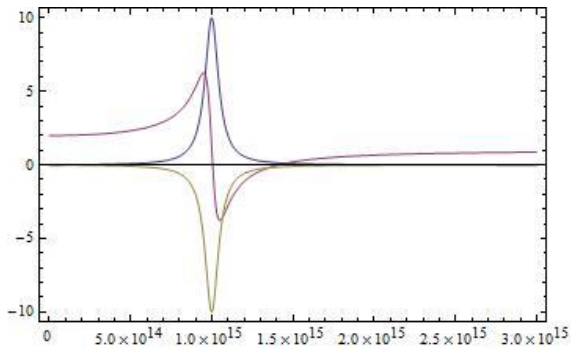
$$H_{int} = \frac{-epA}{m} \quad (6)$$

که در اینجا عملگرهای  $b$  و  $d$  برای کوانتش قطبش و مغناطش بیان شده است. حال الکترون متحرک را که دارای تکانه خطی  $\hbar q$  است را در نظری می‌گیریم.

$$p|q\rangle = \hbar q|q\rangle \quad (7)$$

$$\langle x|q\rangle = \psi_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{iq \cdot x} \quad (8)$$

که  $|q\rangle$  ویژه بردار تکانه الکترون با ویژه مقدار  $\hbar q$  است. به عبارتی  $q$  عدد موج الکترون می‌باشد. از طرفی هامیلتونی مختل نشده  $H_0 = H_{ele} + H_F$  دارای ویژه حالت  $|ele\rangle = |ele + rad\rangle$  می‌باشد که حاصل ضرب مستقیم ویژه حالت‌های هامیلتونی-های  $H_F$  و  $H_{ele}$  هستند. با بکار بردن نظریه اختلال مکانیکی کوانتومی با تقریب مرتبه اول، احتمال گذار بر واحد زمان برای الکترون آزاد با تکانه  $\hbar q$  که به واسطه گسیل فتونی با تکانه  $\hbar k$  و



نمودار (۱): نمودار گذردهی الکتریکی بر حسب فرکانس رسم شده است. نمودار آبی نشان دهنده قسمت موهومی گذردهی (جذب)، نمودار قرمز نشان دهنده قسمت حقیقی و نمودار سبز نشان دهنده تقویت است.

در بخش موهومی به صورت کلی داریم

$$\text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2 \varepsilon(\omega) + k^2 c^2}\right) = \frac{\omega^2 \text{Im} \varepsilon(\omega)}{(-\omega^2 \text{Re} \varepsilon(\omega) + k^2 c^2)^2 + (\omega^2 \text{Im} \varepsilon(\omega))^2} \quad (۱۴)$$

اگر بتوانیم از قسمت موهومی ضرایب گذردهی الکتریکی چشم پوشی کنیم یعنی جذب (اتلاف) را در نظر نگیریم، داریم:

$$\lim_{\text{Im} \varepsilon(\omega) \rightarrow 0} \frac{\omega^2 \text{Im} \varepsilon(\omega)}{(-\omega^2 \text{Re} \varepsilon(\omega) + k^2 c^2)^2 + (\omega^2 \text{Im} \varepsilon(\omega))^2} = \pi \delta(k^2 c^2 - \omega^2 \text{Re} \varepsilon(\omega)) \quad (۱۵)$$

با استفاده از این تقریب و رابطه (۱۰) شدت تابش بردار واحد زمان به این شکل بدست می‌آید:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^2 \gamma}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \int \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \text{Re} \varepsilon(\omega)}\right) d\omega \quad (۱۶)$$

البته این تقریب در مواردی که نسبت بخش موهومی به بخش حقیقی ضریب گذردهی از حدی کوچکتر باشد، نیز صادق است.

در صورتی که پاشندگی محیط را نیز در نظر بگیریم دیگر نمی‌توانیم از تقریب  $\text{Im} \varepsilon(\omega) \rightarrow 0$  استفاده کنیم و با این شرایط شدت تابشی را باید در حالت کلی بررسی کرد.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^2 \gamma}{2\pi^2 \varepsilon_0 c^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \omega d\omega \left[1 - \frac{\omega^2}{k^2 \gamma^2}\right] \text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2 \varepsilon(\omega) + k^2 c^2}\right)$$

انرژی  $\hbar\omega$  به تکانه جدید  $\hbar(q-k)$  تغییر می‌کند مطابق با قاعده طلایی فرمی برابر است با:

$$\Gamma_{q \rightarrow q-k} = \frac{2\pi}{\hbar} |1_k \langle q-k | H_{\text{int}} | q \rangle \langle 0 | \rangle|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} - \frac{\hbar^2 |q-k|^2}{2m} - \hbar\omega\right) \quad (۹)$$

در اینجا  $|0\rangle$  نشان دهنده حالت خلأ و  $|1_k\rangle$  نشان دهنده حالت برانگیخته با یک فتون با بردار موج  $k$  و فرکانس  $\omega$  است. در اینجا شناسه‌ی تابع دلتای دیراک نشان دهنده پایستگی انرژی است. با داشتن  $H_{\text{int}}$  در رابطه (۶) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\Gamma_{q \rightarrow q-k} = \frac{e^2 \gamma^2 (1 - \cos^2 \theta)}{4\pi^3 \varepsilon_0 \hbar} \text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2 \varepsilon(\omega) + k^2 c^2 \mu^{-1}(\omega)}\right) \delta\left(k \gamma - \omega \left(1 + \frac{\hbar k^2}{2m\omega}\right)\right) \quad (۱۰)$$

در این حالت شدت تابش بر واحد زمان با استفاده از رابطه (۱۰) به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{e^2 \gamma}{2\pi^2 \varepsilon_0} \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3 k \int_0^{+\infty} d\omega \hbar \omega \Gamma_{q \rightarrow q-k} \\ &= \frac{e^2 \gamma}{2\pi^2 \varepsilon_0} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \omega d\omega \left[1 - \frac{\omega^2}{k^2 \gamma^2} \left(1 + \frac{\hbar k^2}{2m\omega}\right)^2\right] \text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2 \varepsilon(\omega) + k^2 c^2 \mu^{-1}(\omega)}\right) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

در اینجا با توجه به آرگومان تابع دلتا استنباط می‌شود که دیگر رابطه- $k$  و  $\omega$  رابطه‌ای خطی نیست.

$$\cos \theta - \frac{\omega}{kv} \left(1 + \frac{\hbar k^2}{2m\omega}\right) = 0 \quad (۱۲)$$

انتگرال روی  $k$  و  $\omega$  به یکدیگر مربوط هستند یعنی انتگرال روی صفحه  $k\omega$  باید در فضایی بین یک سهمی و محور  $k$  در نظر گرفته شود. اکنون محیط را پاشنده در نظر می‌گیریم و با توجه به مدل نوسانگر لورنتس  $\varepsilon(\omega)$  را به شکل کلی تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (۱۳)$$

### ۳- نتیجه گیری

وقتی ذره باردار درون محیط مادی با سرعتی بیش از سرعت فاز نور در محیط حرکت کند در صورتی که محیط مادی را پاشنده در نظر بگیریم توان تابشی با تغییر در ضریب میرایی تغییر می کند و این توان تابش با حالتی که پاشندگی را در نظر نگیریم متفاوت است.

### مراجع:

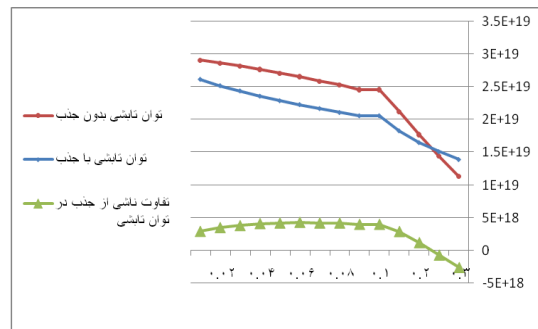
[۱] P. A. Eerenkov, "Visible Radiation Produced by Electrons Moving in a Medium with Velocities Exceeding that of Light," *Physical Review* 52, 378-379 (1973).

[2] R. Matloob, and A. Ghaffari, "Eerenkov radiation in a causal permeable medium," *Physical Review A* 70, 052116 (2004).

[3] F. Kheirandish, and M. Soltani, "Extension of the Huttner-Barnett model to a magnetodielectric medium," *Physical Review A* 78, 012102 (2008).

$$= \frac{e^2 \gamma}{2\pi^2 \epsilon_0 c^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty \omega d\omega \left[ 1 - \frac{\omega^2}{k^2 \gamma^2} \right] \left[ \frac{\omega^2 \operatorname{Im} \epsilon(\omega)}{(-\omega^2 \epsilon(\omega) + k^2 c^2)^2 + (\omega^2 \operatorname{Im} \epsilon(\omega))^2} \right] \quad (17)$$

با توجه به نمودار (۱) دیده می شود که در فرکانس هایی نزدیک فرکانس تشدید  $\omega_0$  باید حتماً اتلاف را در نظر گرفت چون جذب محیط باعث کاهش شدت تابش چرنکوف می شود. این افت شدت تابشی وابستگی به ضریب میرایی محیط ( $\gamma$ ) دارد. در حالت کلی با افزایش  $\gamma$  این تغییر در شدت محسوس تر می شود. با استفاده از محاسبات عددی رابطه ی (۱۶) و (۱۷) توان تابشی را با احتساب اتلاف و بدون اتلاف محاسبه کرده و در نمودار (۲) نمایش می دهیم. همانطور که در نمودار دیده می شود در نظر گرفتن اتلاف در نتیجه نهایی بسیار موثر است. با تغییر ضریب میرایی محیط، اختلاف در توان تابش چرنکوف در محیطی بدون جذب با توان تابش چرنکوف در محیط جاذب تغییر می کند.



نمودار (۲): در این نمودار توان تابشی بر حسب گذردهی الکتریکی رسم شده است. هدف این نمودار مقایسه توان تابش چرنکوف در محیط های جاذب و بدون

اتلاف است، و در اینجا  $\beta = 0.8$  و  $\frac{\omega_0}{\omega_p} = 1$

حال در مدل نوسانگر لورنتسی اگر محیط را جاذب در نظر نگیریم یعنی حالت تقویت کننده در نظر بگیریم ،

$$\epsilon_A(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (18)$$

$$\operatorname{Im} \epsilon_A(\omega) = \frac{-\omega_p^2 \gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (19)$$

در این صورت با استفاده از جایگذاری قسمت موهومی ضریب گذردهی الکتریکی درون رابطه شدت تابشی استنباط می شود که رابطه تابش چرنکوف به نوعی وارون شده است که این وارونی نشان دهنده بازگشت انرژی به ذره باردار متحرک است .