



درهم تنیدگی در برهم کنش غیرخطی دو اتم دوترازی با یک میدان تکمد در حضور اثرهای کر و استارک با گذارهای چندفوتونی

حمیدرضا باغشاهی^{۱,۳}، محمد کاظم توسلی^{۱,۲} و عباس بهجت^{۱,۲}

^۱گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^۲گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

^۳گروه فیزیک، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده- در این مقاله برهم کنش دو اتم دوترازی با یک میدان تکمد غیرخطی در حضور اثرهای کر و استارک را با لحاظ کردن گذارهای چندفوتونی در یک رژیم غیرخطی در نظر گرفته ایم. پس از به دست آوردن جواب تحلیلی برای سامانه اتم-میدان و انتخاب یک تابع غیرخطی معین، آنتروپی خطی را به عنوان میزان درهم تنیدگی بین اتم و میدان مورد بررسی قرار می دهیم. در این پژوهش، یک تابع غیرخطی ویژه را به عنوان تحقق فیزیکی این ساختار در نظر گرفته ایم.

کلید واژه- اثر کر، آنتروپی خطی، درهم تنیدگی کوانتومی، اثر استارک.

Entanglement in the Nonlinear Interaction of Two Two-Level Atoms with a Single-Mode Cavity Field in the Presence of Stark Effect and Kerr Medium with Multi-Photon Process

Hamid Reza Baghshahi^{1,3}, Mohammad Kazem Tavassoly^{1,2} and Abbas Behjat^{1,2}

¹Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

²Photonics Research Group, Engineering Research Center, Yazd University, Yazd

³Department of Physics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract- In this paper we consider the interaction between two two-level atoms with a nonlinear single-mode cavity field in the presence of the Stark effect and Kerr medium by considering multi-photon processes in the nonlinear regime. After obtaining the explicit form of the atom-field wave function and choosing a particular nonlinearity function, linear entropy as a measure of atom-field entanglement has been investigated. As a physical realization, we examined the approach by considering a particular nonlinearity function.

Keywords: Kerr medium, Linear entropy, Quantum entanglement, Stark shift.

۱- مقدمه

یکی از ویژگی‌های کاملاً غیرکلاسیکی برخی از سامانه‌های کوانتومی، درهم‌تنیدگی است که آن‌ها را از سامانه‌های کلاسیکی متمایز می‌سازد. این ویژگی کوانتومی، نقش مهمی در نظریه اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... ایفا می‌کند [۱]. یکی از روش‌های ایجاد سامانه‌های درهم‌تنیده، فراهم آوردن برهم‌کنش اتم و میدان است. ساده‌ترین راه برای بررسی کاملاً کوانتومی برهم‌کنش اتم-میدان و ایجاد درهم‌تنیدگی بین آنها مدل جینز-کامینگز است [۲]، که برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان تکمد را توصیف می‌کند. به این مدل تعمیم‌های زیادی داده شده است. یکی از این تعمیم‌ها، در نظر گرفتن دو یا چند اتم به جای یک اتم است [۳]. در این مقاله برهم‌کنش دو اتم دوترازی با یک میدان تکمد غیرخطی با گذارهای چندفوتونی در حضور اثرهای کر و استارک در یک رژیم غیرخطی (تغییر شکل یافته f) را در نظر گرفته و با انتخاب یک تابع غیرخطی معین ($f(n) = \sqrt{n}$)، آنتروپی خطی را به عنوان معیار درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان، مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین اثرهای کر و استارک، پارامتر نامیزانی و جفت‌شدگی وابسته به شدت را بر میزان درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲- سامانه فیزیکی و هامیلتونی آن

هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم دوترازی یکسان با یک میدان تکمد غیرخطی با گذارهای چندفوتونی در حضور اثرهای کر و استارک در یک رژیم غیرخطی به شکل زیر خواهد بود:

$$H = \nu \hat{A}^\dagger \hat{A} + \sum_{j=1,2} \frac{\omega}{2} \hat{\sigma}_z^{(j)} + \chi \hat{A}^{\dagger 2} \hat{A}^2 + \hat{A}^{\dagger k} \hat{A}^k \sum_{j=1,2} (\beta_1 \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \beta_2 \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(j)}) + \lambda \sum_{j=1,2} (\hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{A}^{2k} + \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{A}^{\dagger 2k}) \quad (1)$$

که در آن ω بسامدگذار اتمی، λ ثابت جفت‌شدگی اتم و میدان، ν بسامد میدان، $\hat{\sigma}_\pm$ و عملگرهای گذار و وارونی جمعیت مربوط به اتم‌ها، χ پذیرفتاری مرتبه سوم

(مربوط به اثر کر)، β_1 و β_2 ضرایب استارک و برچسب‌های j شمارنده اتم‌های ۱ و ۲ هستند. همچنین $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش تغییر شکل یافته $f(n)$ و $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $\hat{A}^\dagger = f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger$ هستند که در آنها $f(n)$ یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. با استفاده از تعریف عملگرهای $\hat{A}$ ، $\hat{A}^\dagger$ و پارامتر نامیزانی به صورت $\Delta = \omega - k\nu$ هامیلتونی (۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \nu (\hat{a}^\dagger \hat{a} f^2(\hat{n}) + \frac{k}{2} \sum_{j=1,2} \hat{\sigma}_z^{(j)}) \\ & + \sum_{j=1,2} \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z^{(j)} + \chi \hat{n}(\hat{n}-1) f^2(\hat{n}) f^2(\hat{n}-1) \\ & + \left(\frac{[f(\hat{n})!]}{[f(\hat{n}-k)!]} \right)^2 \hat{a}^{\dagger k} \hat{a}^k \sum_{j=1,2} (\beta_1 \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{\sigma}_+^{(j)} + \beta_2 \hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{\sigma}_-^{(j)}) \\ & + \lambda \sum_{j=1,2} (\hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{a}^{2k} \frac{[f(\hat{n})!]}{[f(\hat{n}-2k)!]} + \hat{\sigma}_-^{(j)} \frac{[f(\hat{n})!]}{[f(\hat{n}-2k)!]} \hat{a}^{\dagger 2k}) \end{aligned} \quad (2)$$

حال تابع موج دو اتم دوترازی در هر لحظه از زمان را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-i\nu(\hat{n} f^2(\hat{n}) + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^2 \hat{\sigma}_z^{(j)})] \\ & \times q_n \left[A_n(t) e^{-i\gamma_1 t} |n, e, e\rangle + B_{n+2k}(t) e^{-i\gamma_2 t} |n+2k, g, e\rangle + \right. \\ & \left. C_{n+4k}(t) e^{-i\gamma_3 t} |n+4k, g, g\rangle \right] \end{aligned}$$

که در آن نمادهای زیر اختیار شده است:

$$\begin{aligned} \gamma_1(n) = & \Delta + \chi n(n-1) f^2(n) f^2(n-1) \\ & + 2\beta_2 \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{[f(n)!]}{[f(n-k)!]} \right)^2 \\ \gamma_2(n) = & \chi(n+2k)(n+2k-1) f^2(n+2k) f^2(n+2k-1) \\ & + (\beta_1 + \beta_2) \frac{(n+2k)!}{(n+k)!} \left(\frac{[f(n+2k)!]}{[f(n+k)!]} \right)^2 \\ \gamma_3(n) = & -\Delta + \chi(n+4k)(n+4k-1) f^2(n+4k) f^2(n+4k-1) \\ & + 2\beta_1 \frac{(n+4k)!}{(n+3k)!} \left(\frac{[f(n+4k)!]}{[f(n+3k)!]} \right)^2 \\ q_n = & \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \end{aligned}$$

حالت اولیه میدان را حالت همدوس و حالت اولیه اتم‌ها را برهم‌نهی‌ای از حالت‌هایی که در آن هر دو اتم در حالت پایه ($|g\rangle$) و یا هر دو اتم در حالت برانگیخته ($|e\rangle$) باشد در نظر می‌گیریم:

بدین ترتیب، شکل صریح و دقیق تابع موج سامانه مورد مطالعه به طور تحلیلی به دست آمد. برای بررسی های بعدی کافی است شکل تابع جفت شدگی را تعیین کنیم. در ادامه این مقاله، به عنوان یک نمونه فیزیکی برای ساختار ارائه شده از تابع غیرخطی $f(n) = \sqrt{n}$ استفاده می کنیم. این تابع به طور طبیعی در هامیلتونی هایی که توصیف کننده برهم کنش یک اتم دوترازی با میدان تابشی و با جفت شدگی وابسته به شدت هستند ظاهر شده است [۴ و ۵].

۳- درهم تنیدگی

از بین معیارهای متفاوت اندازه گیری درجه درهم تنیدگی، برای محاسبه درهم تنیدگی، آنتروپی خطی را انتخاب می کنیم. آنتروپی بزرگ تر (کوچک تر) نشان دهنده درجه درهم تنیدگی بیشتر (کمتر) است. آنتروپی خطی با رابطه $\hat{\rho}_{atom}$ تعریف می شود [۶] که $S(t) = 1 - Tr(\hat{\rho}_{atom}^2)$ ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی است.

با استفاده از تابع موج سامانه (۳) ماتریس چگالی در هر لحظه از زمان به صورت $\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ به دست می آید. با رد گرفتن روی مؤلفه های میدان، ماتریس چگالی کاهش یافته اتم ها به شکل زیر خواهد بود

$$\hat{\rho}_{atoms}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) & \rho_{12}(t) & \rho_{14}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{24}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{22}(t) & \rho_{24}(t) \\ \rho_{41}(t) & \rho_{42}(t) & \rho_{42}(t) & \rho_{44}(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 |A_n(t)|^2, \quad \rho_{22}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 |B_{n+2k}(t)|^2 \\ \rho_{12}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+2k} q_n^* A_{n+2k}(t) B_{n+2k}^*(t) \\ \rho_{44}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|^2 |C_{n+4k}(t)|^2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

با استفاده از عناصر ماتریسی بالا آنتروپی خطی برای سامانه مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$S(t) = 1 - [(\rho_{11}(t))^2 + (\rho_{22}(t))^2 + (\rho_{44}(t))^2 + 4(\rho_{12}(t))^2 + 4(\rho_{24}(t))^2 + 2(\rho_{14}(t))^2] \quad (9)$$

با محاسبه آنتروپی بالا می توان میزان درهم تنیدگی دو اتم را با میدان محاسبه و تأثیر اثر استارک، اثر کر، پارامتر

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_n q_n [\cos(\frac{\theta}{2})|n, e, e\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})|n+4k, g, g\rangle] \quad (4)$$

در صورتی که $\theta = 0$ باشد حالت اولیه هر دو اتم حالت برانگیخته، در صورتی که $\theta = \pi$ باشد حالت اولیه هر دو اتم حالت پایه و برای زاویه های دیگر برهم نهی ای از هر دو حالت را نتیجه می دهد.

با استفاده از هامیلتونی (۲)، تابع موج (۳) و حل معادله شرودینگر، معادلات زیر برای ضرایب بسط تابع موج به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} i \frac{dA_n}{dt} &= 2F B_{n+2k} e^{-i\eta t} \\ i \frac{dB_{n+2k}}{dt} &= F A_n e^{i\eta t} + G C_{n+4k} e^{-i\zeta t} \\ i \frac{dC_{n+4k}}{dt} &= 2G B_{n+2k} e^{i\zeta t} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن ها:

$$F = \frac{[f(n+2k)]!}{[f(n)]!} \sqrt{\frac{(n+2k)!}{n!}} \lambda, \quad G = \frac{[f(n+4k)]!}{[f(n+2k)]!} \sqrt{\frac{(n+4k)!}{(n+2k)!}} \lambda$$

$$\gamma_2(n) - \gamma_1(n) = \eta, \quad \gamma_3(n) - \gamma_2(n) = \zeta$$

با حل معادلات دیفرانسیل جفت شده (۵)، بالاخره خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2FG} \sum_{m=1}^3 \Omega_m [\mu_m^2 - \zeta \mu_m - 2G^2] \times \\ &\quad \exp[i(\mu_m - \eta - \zeta)t] \\ B_{n+2k}(t) &= \frac{-1}{2G} \sum_{m=1}^3 \Omega_m \mu_m \exp[i(\mu_m - \zeta)t] \\ C_{n+4k}(t) &= \sum_{m=1}^3 \Omega_m \exp[i(\mu_m)t] \end{aligned} \quad (6)$$

در روابط بالا قراردادهای زیر را اختیار کرده ایم:

$$\mu_m = -\frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}(x_1^2 - 3x_2)^{1/2} \cos(\varphi + \frac{2\pi(m-1)}{3})$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{9x_1x_2 - 2x_1^3 - 27x_3}{(x_1^2 - 3x_2)^{3/2}} \right]$$

$$x_1 = -\eta - 2\zeta, \quad x_2 = \zeta(\zeta + \eta) - 2F^2 - 2G^2$$

$$x_3 = 2G^2(\eta + \zeta), \quad \Omega_m = \frac{2G\Gamma + \mu_q \mu_r \sin(\varphi/2)}{\mu_{mq} \mu_{mr}}$$

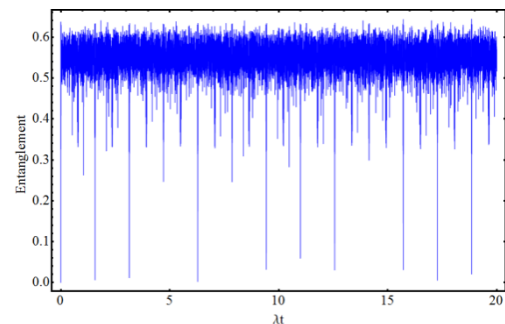
$$\mu_{mq} = \mu_m - \mu_q, \quad m \neq q \neq r = 1, 2, 3$$

$$\Gamma = F \cos(\frac{\theta}{2}) + G \sin(\frac{\theta}{2})$$

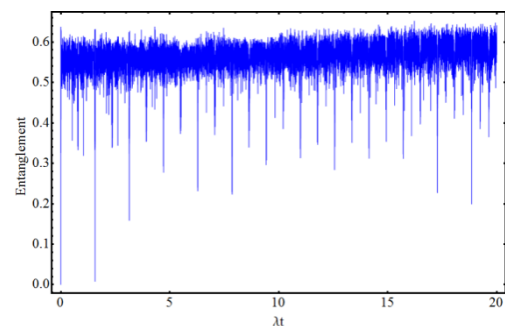
نامیزانی و جفت‌شدگی وابسته به شدت را بر روی آن مورد بررسی قرار داد.

۴- بحث و نتیجه‌گیری

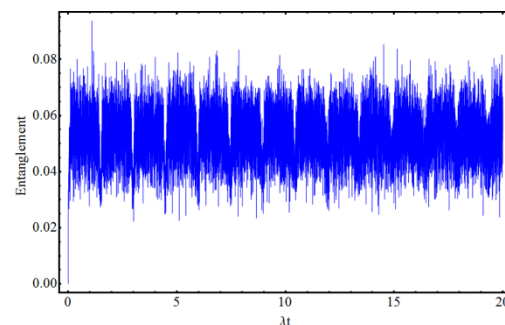
نمودارهای (۱) تا (۴) تغییرات زمانی آنتروپی خطی (درهم‌تنیدگی) را برای حالتی که اتم‌ها در ابتدا در حالت برانگیخته و میدان در حالت همدوس باشد نشان می‌دهند. نمودار (۱) با فرض صفر بودن پارامتر نامیزانی، در غیاب اثرهای کر و استارک و برای گذارهای دو فوتونی رسم شده است. همان‌طور که مشخص است در این حالت آنتروپی سریعاً به نقطه بیشینه رسیده و بعد از آن یک رفتار نامنظم دارد. صرف‌نظر از برخی بازه‌های زمانی بسیار کوتاه، در اکثر زمان‌ها درهم‌تنیدگی در حوالی بیشینه قرار دارد.



شکل (۱) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای $k=1, \chi=0, \Delta=0, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=5, \theta=0$.



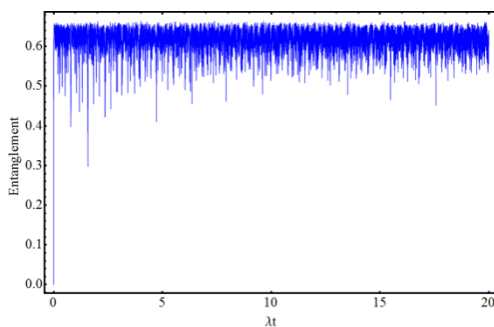
شکل (۲) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای بررسی پارامتر نامیزانی $k=1, \chi=0, \Delta=5, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=5, \theta=0$.



شکل (۳) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای بررسی اثر کر $k=1, \chi=0.06, \Delta=0, \beta_1=\beta_2=0, \alpha=5, \theta=0$.

شکل (۲) تأثیر پارامتر نامیزانی بر روی درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهد. با مقایسه این شکل و شکل (۱) پیداست که پارامتر نامیزانی تا حدودی کمینه‌های آنتروپی خطی (نسبت به شکل (۱) که کمینه‌های بیشتری نزدیک به صفر داشتند) را افزایش می‌دهد ولی تأثیری بر مقدار بیشینه ندارد. شکل (۳) برای بررسی تأثیر اثر کر بر درجه درهم‌تنیدگی رسم شده‌است. نمودار نشان می‌دهد که اثر کر بیشینه درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

شکل (۴) تغییرات زمانی آنتروپی خطی برای بررسی اثر استارک $k=1, \chi=0, \Delta=0, \beta_1=\beta_2=2, \alpha=5, \theta=0$.



در شکل (۴) تأثیر اثر استارک در غیاب اثر کر و نامیزانی بررسی شده است. با توجه به این شکل، اثر استارک تأثیر مثبتی در میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان دارد، زیرا در حضور این اثر، آنتروپی بین نقاط بیشینه و کمینه با دامنه محدودتری نوسان می‌کند، به عبارت دیگر همواره درهم‌تنیدگی قابل ملاحظه‌ای بین دو اتم و میدان وجود دارد. بر اساس محاسبات انجام شده که در اینجا آورده نشده است، در صورتی که اثرهای کر، استارک و پارامتر نامیزانی را به‌طور همزمان بررسی نماییم، به این نتیجه می‌رسیم که اثر کاهنده کر روی میزان آنتروپی اثر غالب است.

مراجع:

- [۱] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [۲] E.T. Jaynes, F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, 51 (1963) 89.
- [۳] N. H. Abdel-Wahab, M. F. Mourad, *Phys. Scr.* 84 (2011) 015401.
- [۴] S. Singh, *Phys. Rev. A* 25 (1982) 3206.
- [۵] J. M. Fink and et al, *Nature* 454 (2008) 315.
- [۶] R. M. Angelo and et al, *Phys. Rev. A* 64 (2001) 043801.