



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



مهندسی حالت‌های کوانتومی میدان اتمی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین در برهم‌کنش با یک کاواک اپتیکی

علی دلفی^۱، محمد حسین نادری^۲ و محمود سلطان‌الکتابی^۲

^۱مرکز ملی علوم و فنون لیزر ایرن، تهران

^۲گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

چکیده - در این مقاله به بررسی نظری سامانه‌ای متشکل از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین که در داخل شبکه‌ی اپتیکی یک کاواک به دام افتاده است می‌پردازیم. نشان داده می‌شود که چگونه با استفاده از اثر برهم‌کنش غیر خطی اتم-اتم می‌توان حالت‌افز و خیزهای کوانتومی میدان اتمی (مد بوگولیوبوف) را دستکاری و کنترل کرد و به حالت‌های چلانده دست یافت.

کلیدواژه-چگالیده بوز-اینشتین، شبکه اپتیکی، حالت چلانده

Quantum state engineering of the atomic field of a Bose-Einstein condensate interacting with an optical cavity

Ali Dalafi^{1,2}, Mohammad Hosein Naderi², Mahmoud Soltanolkotabi²

¹Iranian National Center of Laser Science and Technology (INLC), Tehran

²Quantum Optics Group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan

Abstract- In this paper we investigate theoretically a system consisting of a Bose-Einstein Condensate (BEC) trapped inside the optical lattice of an optical cavity. It is shown that using the nonlinear atom-atom interaction, how one can manipulate and control the state of the Bogoliubov mode (the quantum fluctuations of the atomic field) and produce squeezed states.

Keywords: BEC, optical lattice, squeezed state

۱- مقدمه

چنانچه تعداد N بوزون در داخل یک چاه پتانسیل به دام بیفتند و تا دماهای بسیار پایین (در حدود میکرو کلوین) سرد شوند، آنگاه جمعیت بزرگی از آنها در پایین ترین تراز انرژی چاه پتانسیل قرار می گیرد و یک چگالیده بوز-اینشتین تشکیل می شود [۱].

در این مقاله به بررسی چگالیده ای متشکل از تعداد N اتم روبیدوم می پردازیم که در داخل شبکه ای اپتیکی (پتانسیل تناوبی ناشی از موج ایستاده ای الکترومغناطیسی) یک کاواک قرار گرفته و به وسیله دو پتانسیل هماهنگ، یکی در راستای طولی (با بسامد $\omega_{\parallel}$) و دیگری در راستای عرضی کاواک (با بسامد $\omega_{\perp}$) به دام افتاده است [۲]. در اثر اندرکنش با میدان کوانتومی درون کاواک تعداد محدودی از اتم ها به نخستین حالت برانگیخته ای شبکه اپتیکی رانده می شوند و موجب بروز افت و خیزهای کوانتومی در میدان اتمی چگالیده می شوند که به آن مد بوگولیوبوف می گویند. در این مقاله نشان می دهیم که از آهنگ برخورد بین اتم ها (که توسط بسامد $\omega_{\perp}$ قابل کنترل است) می توان به عنوان پارامتری برای کنترل درجه ای چلانگی مد بوگولیوبوف استفاده کرد.

در بخش ۲ به توصیف نظری سامانه و استخراج هامیلتونی آن می پردازیم و در بخش ۳ عملگر تحول زمانی سامانه را به دست می آوریم. در بخش ۴ ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف را به دست آورده و در بخش ۵ خواص چلانگی آن را بررسی می کنیم. سرانجام در بخش ۶ نتایج به دست آمده را جمع بندی می کنیم.

۲- توصیف نظری سامانه

سامانه ای مورد مطالعه عبارتست از یک چگالیده بوز-اینشتین متشکل از تعداد N اتم دو تراز با جرم m_0 و بسامد گذار ω_a که در داخل یک کاواک اپتیکی با طول L قرار گرفته است. کاواک مزبور از طریق یکی از آینه هایش به وسیله یک لیزر با بسامد ω_p با آهنگ η دمیده می شود. فرض می کنیم که چگالیده در داخل یک دام متقارن استوانه ای با فرکانس عرضی $\omega_{\perp}$ و فرکانس طولی $\omega_{\parallel}$ محبوس شده است. در رژیم پاشنده، که $\Delta_a = \omega_p - \omega_a$ بسیار بزرگتر از پهنای خط اتمی γ است، حالت

برانگیخته ای الکترونی اتم را می توان به طور آدیاباتیکی حذف نمود و از اثر گسیل خود به خود اتم ها صرف نظر کرد [۳]. در چنین شرایطی چنانچه $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$ باشد می توان درجه ای آزادی حرکتی اتم ها را در راستای محور x در چهارچوب فرمول بندی کوانتشی دوم با میدان کوانتومی $\Psi(x)$ و دینامیک سامانه را با هامیلتونی مؤثر یک بعدی زیر توصیف کرد [۴]:

$$H = \int_{-L/2}^{L/2} \Psi^{\dagger}(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + \hbar U_0 \cos^2(kx) \right) a^{\dagger} a + \frac{1}{2} U_s \Psi^{\dagger}(x) \Psi(x) \Psi(x) dx + \hbar \Delta_0 a^{\dagger} a. \quad (1)$$

در اینجا a عملگر نابودی میدان اپتیکی درون کاواک، $\Delta_0 = \omega_0 - \omega_p$ (با بسامد بازآوایی کاواک)، $U_0 = g_0^2 / \Delta_a$ (با بسامد رابی خلأ) و $U_s = 4\pi\hbar^2 a_s / m_0$ است که در آن، a_s طول پراکندگی در برهم کنش اتم-اتم است [۵،۶]. هم چنین $k = \omega_c / c$ عدد موج میدان اپتیکی درون کاواک است.

در رژیم برهم کنش ضعیف، یعنی $U_0 \langle a^{\dagger} a \rangle \leq 10\omega_R$ در آن، $\omega_R = \hbar k^2 / 2m_0$ بسامد پس زنی اتمی است، می توان میدان اتمی را به دو مد متقارن کناری با تکانه های $\pm \hbar k$ محدود کرد که در اثر اندرکنش اتم-فوتون برانگیخته می شوند [۷]. بدین ترتیب با توجه به بقای پاریت و در تقریب بوگولیوبوف، میدان کوانتومی اتمی به صورت زیر توصیف می شود:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{N}{L}} + \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(2kx) c. \quad (2)$$

در این معادله c عملگر نابودی مد بوگولیوبوف است که بیانگر افت و خیزهای کوانتومی حول مد چگالیده (مد تکانه ای صفر) است. در حد میدان های اپتیکی ضعیف احتمال اشغال مد c بسیار کوچکتر از مد تکانه ای صفر است به گونه ای که $\langle c^{\dagger} c \rangle \ll N$ است و در نتیجه می توان مد چگالیده را با عدد $\sqrt{N}$ تقریب زد (تقریب بوگولیوبوف) [۸]. با قرار دادن معادله (۲) در معادله (۱) هامیلتونی سامانه به صورت زیر در می آید:

$$H = \hbar \delta_a a^{\dagger} a + \hbar \omega_c c^{\dagger} c + \frac{1}{4} \hbar \omega_{sw} (c^2 + c^{\dagger 2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar \zeta a^{\dagger} a (c + c^{\dagger}). \quad (3)$$

در اینجا $\delta_a = \Delta_0 + \frac{1}{2} N U_0$ بسامد مؤثر میدان اپتیکی، $\omega_c = 4\omega_R + \omega_{sw}$ بسامد مؤثر مد بوگولیوبوف،

$$H'' = S(\xi) H' S^\dagger(\xi),$$

$$= \hbar \omega'_c c^\dagger c + \hbar \delta_a a^\dagger a - \frac{\hbar}{2} \frac{\xi^2}{\omega_c + \frac{1}{2} \omega_{sw}} (a^\dagger a)^2. \quad (5)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۴) و (۵) می‌توان عملگر تحول سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$U(t) = \exp\left(\frac{-it}{\hbar} H\right), \quad (6)$$

$$= D^\dagger(A) S^\dagger(\xi) \exp\left(\frac{-it}{\hbar} H''\right) S(\xi) D(A).$$

۴- مهندسی حالت‌های کوانتومی و تولید چلانگی

با فرض این که میدان اپتیکی در حالت اولیه همدوس $|\alpha\rangle$ و مد بوگولیوبوف در حالت خلأ آماده‌سازی شده باشند، یعنی $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_a \otimes |0\rangle_c$ ، تحول زمانی بردار حالت سامانه با استفاده از رابطه $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن بسط حالت همدوس بر حسب پایه فوک و با استفاده از معادله (۶) بردار حالت سامانه در لحظه t به دست می‌آید. $|\psi(t)\rangle$ بردار حالت سامانه‌ی متشکل از میدان اپتیکی و چگالیده است. از آنجا که می‌خواهیم خواص آمار کوانتومی چگالیده را بررسی کنیم، باید ماتریس چگالی چگالیده را به دست آوریم که عبارتست از $\rho_c(t) = \text{Tr}_a[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|]$ که در آن، برچسب c به مد بوگولیوبوف و برچسب a به مد میدان اپتیکی اشاره دارد. پس از انجام محاسبات، ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف به صورت زیر به دست می‌آید

$$\rho_c(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\varphi_{n,\xi}(\tau)\rangle\langle\varphi_{n,\xi}(\tau)|. \quad (7)$$

در اینجا $|\varphi_{n,\xi}(\tau)\rangle = D^\dagger(\beta n) S^\dagger(\xi) |\beta n e^{-i\tau}, \xi e^{-2i\tau}\rangle$ است که در آن $\tau = \omega'_c t$ است. با توجه به این که $|\beta n e^{-i\tau}, \xi e^{-2i\tau}\rangle$ یک حالت چلانده است، معادله (۷) نشان می‌دهد که بعد از گذشت زمان t حالت سامانه به صورت یک برهم‌نهی همدوس از حالت‌های چلانده در می‌آید. لازم به توضیح است که در اینجا از اثرات ناشی از اتلاف صرف نظر شده است.

۵- بررسی خواص چلانگی

چنانچه یک میدان کوانتومی در یک حالت چلانده قرار

بسامد پراکندگی در برهم‌کنش $\omega_{sw} = 8\pi\hbar a_s N / m_0 L w^2$ میان اتم‌ها، و $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{N} U_0$ ثابت برهم‌کنش بین مد بوگولیوبوف و میدان اپتیکی درون کاواک است.

آخرین جمله‌ی هامیلتونی (۳) جمله‌ی برهم‌کنش اپتومکانیکی است [۸]. در سامانه‌های اپتومکانیک (کاواک-هایی با آینه‌ی متحرک) [۹،۱۰] فشار تابشی ناشی از میدان درون کاواک باعث حرکت ارتعاشی آینه‌ی متحرک می‌شود و در نتیجه منجر به بروز یک پتانسیل اندرکنش به شکل آخرین جمله معادله (۳) می‌شود که در آن، مد c نقش مد حرکت ارتعاشی آینه را بازی می‌کند. بدین ترتیب مد بوگولیوبوف در سامانه‌ی حاضر، متناظر با مد ارتعاشی آینه‌ی متحرک در یک سامانه‌ی اپتومکانیک است.

۳- دینامیک سامانه

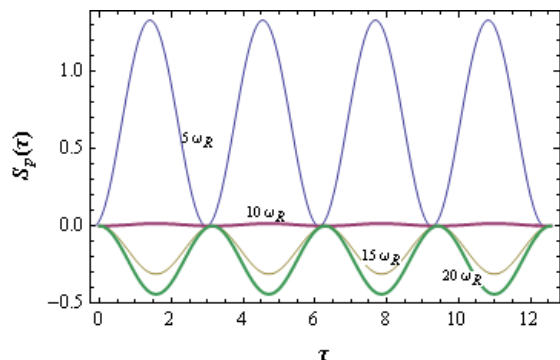
اکنون می‌خواهیم با استفاده از هامیلتونی (۳)، عملگر تحول زمانی سامانه را به دست آوریم. بدین منظور این هامیلتونی را در دو مرحله به شکل قطری درخواهیم آورد. در مرحله‌ی اول یک عملگر جابجایی به شکل $D(A) = \exp(A(c^\dagger - c))$ تعریف می‌کنیم که در آن، $A = \beta a^\dagger a$ و $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\xi}{\omega_c + \omega_{sw}/2}$ است [۱۱]. اثر این عملگر بر روی c عبارتست از $D(A) c D^\dagger(A) = c - A$. بدین ترتیب می‌توان اثر عملگر جابجایی را بر روی هامیلتونی (۳) به صورت زیر به دست آورد:

$$H' = D(A) H D^\dagger(A),$$

$$= \hbar \delta_a a^\dagger a + \hbar \omega_c c^\dagger c + \frac{1}{4} \hbar \omega_{sw} (c^2 + c^{\dagger 2}) - \hbar (\omega_c + \frac{1}{2} \omega_{sw}) A^2. \quad (4)$$

در مرحله‌ی بعد، اثر عملگر چلانگی را که به صورت $S(\xi) = \exp(\frac{1}{2} \xi (c^2 - c^{\dagger 2}))$ تعریف می‌شود [۱۲] بر روی هامیلتونی (۴) به دست می‌آوریم. اثر این عملگر بر روی c عبارتست از $S(\xi) c S^\dagger(\xi) = \mu c + \nu c^\dagger$ که در آن $\mu = \cosh \xi$ ، $\nu = s i \xi$ و ξ پارامتر چلانگی است [۱۲]. می‌توان نشان داد چنانچه $\xi = \frac{1}{2} \hbar (\omega'_c - \omega_c)$ باشد که در آن $\omega'_c = \sqrt{\omega_c^2 - \frac{1}{4} \omega_{sw}^2}$ است و همچنین اگر $\mu = \sqrt{\omega_c / 2\omega'_c - 1/2}$ و $\nu = \sqrt{\omega_c / 2\omega'_c + 1/2}$ انتخاب شوند، آنگاه خواهیم داشت:

از طریق $\omega_{\perp}$ قابل کنترل است. از آنجایی که بسامد دام عرضی به طور تجربی قابل کنترل است، بدین ترتیب با تغییر آن می‌توان نرخ برخورد اتمی را تغییر داد و در نتیجه درجه چلانگی مد بوگولیووف را کنترل کرد.



شکل ۱: تحول زمانی پارامتر چلانگی $S_p(\tau)$ به ازای داده‌های تجربی مرجع [۱۴] برای چهار مقدار مختلف بسامد برخورد: $\omega_{sw} = 5\omega_R$ (منحنی آبی)، $\omega_{sw} = 10\omega_R$ (منحنی بنفش)، $\omega_{sw} = 15\omega_R$ (منحنی خردلی) و $\omega_{sw} = 20\omega_R$ (منحنی سبز). همچنین $\alpha^2 = 0.01$ فرض شده است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی اندرکنش یک چگالیده بوز-اینشتین با میدان کوانتومی درون یک کاواک اپتیکی پرداخته و نشان داده‌ایم که اندرکنش اتم-میدان موجب بروز افت و خیزهای کوانتومی در میدان اتمی می‌شود. حالت کوانتومی این افت و خیزها به نرخ برخورد بین اتم-ها بستگی دارد به گونه‌ای که افزایش نرخ برخورد اتمی می‌تواند منجر به بروز خاصیت چلانگی در افت و خیزهای میدان اتمی شود.

مراجع

- [1] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [2] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [3] C. Maschler and H. Ritsch, *Opt. Commun.* **243**, 145 (2004).
- [4] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, and Sh. Barzanjeh, *Phys. Rev. A* **87**, 013417 (2013).
- [5] P. Domokos and H. Ritsch, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 1098 (2003).
- [6] C. Maschler and H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 260401 (2005).
- [7] D. Nagy, P. Domokos, A. Vukics, and H. Ritsch, *Eur. Phys. J. D* **55**, 659 (2009).
- [8] R. Kanamoto and P. Meystre, *Phys. Scr.* **82**, 038111 (2010).
- [9] J. D. McCullen, P. Meystre, and E. M. Wright, *Opt. Lett.* **9**, 193-195 (1984).
- [10] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, and E. Vignes, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1830-1840 (1985).

گرفته باشد، آنگاه افت و خیزهای کوانتومی مربوط به یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان (عملگرهای متناظر با مکان و تکانه) کاهش می‌یابد در حالی که برای مؤلفه‌ی دیگر، افت و خیزهای مزبور افزایش می‌یابد [۱۲]. مؤلفه‌های کوادراتوری میدان بوگولیووف به صورت $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(c + c^\dagger)$ و $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(c - c^\dagger)$ تعریف می‌شوند. درجه‌ی چلانگی در هر یک از این مؤلفه‌ها با پارامتر چلانگی مشخص می‌شود: $S_q(\tau) = 2\langle(\Delta q)^2\rangle - 1$ و $S_p(\tau) = 2\langle(\Delta p)^2\rangle - 1$ که در آنها، $(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$ و $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ عدم قطعیت‌های کوانتومی هستند. بدین ترتیب، شرط چلانگی در هر یک از مؤلفه‌ها به صورت $S_i(\tau) < 0$ ($i = p$ or q) تعریف می‌شود.

با در دست داشتن ماتریس چگالی مد بوگولیووف (معادله (۷))، می‌توان پارامتر چلانگی $S_p(\tau)$ را به دست آورد:

$$S_p(\tau) = 4\beta^2 |\alpha|^2 (\mu - \nu)^4 \sin^2 \tau + 2\nu(\mu - \nu)((\mu - \nu)(\mu \cos 2\tau + \nu) - 1). \quad (8)$$

در اینجا باید تاکید شود که عامل تولید اثر چلانگی، برهم‌کنش غیر خطی اتم-اتم است. بنا بر توضیحات بخش قبل چنانچه این عامل غیرخطیت، صفر شود (یعنی اگر $\omega_{sw} = 0$) آنگاه $\xi = 0$ و در نتیجه $(\mu = 1, \nu = 0)$ خواهد شد. بدین ترتیب پارامتر چلانگی به صورت $S_p(\tau) = 4\beta^2 |\alpha|^2 \sin^2 \tau$ درمی‌آید که همواره مثبت است. یعنی در غیاب برهم‌کنش اتمی، خاصیت چلانگی از بین می‌رود.

در شکل (۱) پارامتر چلانگی $S_p(\tau)$ بر حسب متغیر زمان بدون بعد τ رسم شده است. برای رسم این نمودار از داده‌های تجربی مراجع [۱۳، ۱۴] استفاده شده است، یعنی تعداد $N = 10^5$ اتم ^{87}Rb در کاواکی با طول $L = 178 \mu\text{m}$ به دام افتاده و تا دمای $0.1 \mu\text{K}$ سرد شده-اند. $\lambda = 780 \text{nm}$ طول موج میدان اپتیکی، $\Delta_a = 2\pi \times 58 \text{GHz}$ ، $g_0 = 2\pi \times 14.1 \text{MHz}$ و طول پراکندگی در برهم‌کنش اتم-اتم $a_s = 5 \text{nm}$ است.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است خاصیت چلانگی به ازای $\omega_{sw} > 10\omega_R$ بروز می‌کند. بدین ترتیب از ω_{sw} می‌توان به عنوان عاملی برای کنترل درجه‌ی چلانگی حالت مد بوگولیووف استفاده کرد. این پارامتر

- [11] Bose S, Jacobs K and Knight P L 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4175
- [12] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [13] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner, and T. Esslinger, *Science* **322**, 235 (2008).
- [14] S. Ritter, F. Brennecke, K. Baumann, T. Donner, C. Guerlin, and T. Esslinger, *Appl. Phys. B* **95**, 213 (2009).